ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

7

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1885.
CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

REDACTION

Seine Majestät König Oscar II haben, in dem Wunsche einen neuen Beweis des Interesses zu geben, welches Allerhöchstdieselbe för die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften hegen und durch die Förderung der Herausgabe der Acta Mathematica, die sich Allerhöchstderselben gnädigster Protection erfreuen, bereits bezeugt haben, beschlossen, am 21. Januar 1889, dem sechzigsten Jahrestage Allerhöchstderselben Geburt, einer wichtigen Entdeckung auf dem Gebiete der höheren Analysis einen Preis zuzuerkennen. Dieser Preis wird in einer Medaille mit dem Bilde Seiner Majestät, im Goldwerthe von tausend Francs, und ausserdem in einer Summe von zwei tausend fünf hundert Kronen in Gold bestehen (1 Krone = 1 Franc 40 Centimes circa).

Seine Majestät geruhten die Ausführung dieses Planes einer Commission von drei Mitgliedern anzuvertrauen: Herrn Carl Weierstrass zu Berlin, Herrn Charles Hermite zu Paris und Herrn Gösta Mittag-Leffler zu Stockholm, Chefredacteur dieses Journals. Die Bemühungen der Commission waren Gegenstand eines Berichtes, dessen nachstehend folgendes Resultat Seine Majestät Allergnädigst genehmigt haben:

»In Anbetracht der Fragen, welche in verschiedenen Hinsichten die Analysten gleich sehr interessiren und deren Lösung

Sa Majesté Oscar II désireux de donner une nouvelle preuve de l'intérêt qu'Elle porte à l'avancement des sciences mathématiques, intérêt qu'Elle a déjà témoigné, en encourageant la publication du journal Acta Mathematica, qui se trouve sous Son auguste protection, a résolu de décerner le 21 Janvier 1889 soixantième anniversaire de Sa naissance un prix à une découverte importante dans le domaine de l'analyse mathématique supérieure. Ce prix consistera en une médaille, du dix-huitième module, portant l'effigie de Sa Majesté et ayant une valeur en or de mille francs, ainsi qu'en une somme de deux mille cinq cents Kronor en or (1 Krona = 1 franc 40 centimes environ).

Sa Majesté a daigné confier le soin de réaliser Ses intentions à une commission de trois membres: M. Carl Weierstrass à Berlin, M. Charles Hermite à Paris, et le Rédacteur en chef de ce Journal, M. Gösta Mittag-Leffler à Stockholm. Le travail des commissaires a été l'objet d'un rapport dont Sa Majesté a pris connaissance, et voici leurs conclusions auxquelles Elle a donné Son approbation:

»Prenant en considération les questions qui à divers titres préoccupent également les analystes et dont la solution serait

von dem grössten Nutzen für die Fortschritte der Wissenschaft sein würde, macht die Commission SEINER MAJESTÄT ehrfurchtsvoll den Vorschlag, der besten Abhandlung über einen der folgenden Gegenstände den Preis zu ertheilen.

1. Es sollen für ein beliebiges System materieller Punkte, die einander nach dem NEWTON'schen Gesetze anziehen, unter der Annahme, dass niemals ein Zusammentreffen zweier Punkte stattfinde, die Coordinaten jedes einzelnen Punktes in unendliche, aus bekannten Functionen der Zeit zusammengesetzte und für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichmässig convergirende Reihen entwickelt werden.

Dass die Lösung dieser Aufgabe, durch deren Erledigung unsere Einsicht in den Bau des Weltsystems auf das wesentlichste würde gefördert werden, nicht nur möglich, sondern auch mit den gegenwärtig uns zu Gebote stehenden analytischen Hülfsmitteln erreichbar sei, dafür spricht die Versicherung LEJEUNE-DIRICHLET's, der kurz vor seinem Tode einem befreundeten Mathematiker mitgetheilt hat, dass er eine allgemeine Methode zur Integration der Differentialgleichungen der Mechanik entdeckt habe, sowie auch, dass es ihm durch Anwendung dieser Methode gelungen sei, die Stabilität unseres Planetensystems in vollkommen strenger Weise festzustellen. Leider ist uns von diesen Untersuchungen DIRICHLET's, ausser der Andeutung, dass zur Auffindung seiner Methode die Theorie der kleinen Schwankungen einen gewissen Anhalt biete, nichts erhalten worden;* es darf aber als gewiss an-

du plus grand intérêt pour les progrès de la science, la commission propose respectueusement à SA MAJESTÉ d'accorder le prix au meilleur mémoire sur l'un des sujets suivants.

1. Etant donné un système d'un nombre quelconque de points matériels qui s'attirent mutuellement suivant la loi de NEWTON, on propose, sous la supposition qu'un choc de deux points n'ait jamais lieu, de représenter les coordonnées de chaque point sous forme de séries procédant suivant quelques fonctions connues du temps et qui convergent uniformément pour toute valeur réelle de la variable.

Ce problème dont la solution étendra considérablement nos connaissances par rapport au système du monde, paraît pouvoir être résolu à l'aide des moyens analytiques que nous avons actuellement à notre disposition; on peut le supposer du moins, car LEJEUNE-DIRICHLET a communiqué peu de temps avant sa mort à un géomètre de ses amis qu'il avait découvert une méthode pour l'intégration des équations différentielles de la mécanique, et qu'en appliquant cette méthode il était parvenu à démontrer d'une manière absolument rigoureuse la stabilité de notre système planétaire. Malheureusement nous ne connaissons rien sur cette méthode, si ce n'est que la théorie des oscillations infiniment petites paraît avoir servi de point de départ pour sa découverte.* On peut pourtant supposer presque avec certitude que cette méthode était basée non point sur des calculs longs et compliqués, mais sur le

* KUMMER, *Gedächtnissrede auf Lejeuné-Dirichlet,* Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1860, p. 35.

genommen werden, dass sie nicht in schwierigen und verwickelten Rechnungen bestanden haben, sondern in der Durchführung eines einfachen Grundgedankens, den wieder aufzufinden ernster und beharrlicher Forschung wohl gelingen möchte.

Sollte indessen die gestellte Aufgabe Schwierigkeiten darbieten, die zur Zeit nicht zu überwinden wären, so könnte der Preis auch ertheilt werden für eine Arbeit, in der irgend ein anderes bedeutendes Problem der Mechanik in der oben angedeuteten Weise vollständig erledigt würde.

développement d'une idée fondamentale et simple, qu'on peut avec raison espérer de retrouver par un travail persévérant et approfondi. Dans le cas pourtant où le problème proposé ne parviendrait pas à être résolu pour l'époque du concours, on pourrait décerner le prix pour un travail, dans lequel quelque autre problème de la mécanique serait traité de la manière indiquée et résolu complètement.

2. Herr FUCHS hat in mehreren Abhandlungen* nachgewiesen, dass eindeutige Functionen zweier Veränderlichen existiren, die ihrer Entstehungsweise nach den ABEL'schen Functionen zweier Argumente verwandt, aber allgemeiner sind, als diese, und für die Analysis eine grosse Bedeutung gewinnen können, wenn ihre Theorie erst weiter entwickelt sein wird. Was zunächst zu leisten wäre, ist in folgender Aufgabe ausgesprochen:

Es sollen die von FUCHS definirten Functionen in einem Falle von hinreichender Allgemeinheit wirklich dargestellt und die wesentlichen Eigenschaften derselben entwickelt werden.

2. M. FUCHS a démontré dans plusieurs de ses mémoires* qu'il existe des fonctions uniformes de deux variables, qui se rattachent par le mode de leur génération aux fonctions ultraelliptiques, mais sont plus générales que ces dernières, et qui pourraient probablement acquérir une grande importance pour l'analyse, si leur théorie était développée davantage.

On propose d'obtenir, sous forme explicite, les fonctions dont l'existence a été prouvée par M. FUCHS, dans un cas suffisamment général, de manière à ce qu'on puisse reconnaître et étudier leurs propriétés les plus essentielles.

---

* Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Febr. 1880, p. 170.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 89, p. 251. — Bulletin des sciences mathématiques, 2me série, t. IV.

Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Junius 1880, p. 445. — Bulletin des sciences mathématiques, 2me série, t. IV.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 90, p. 71. — Bulletin des sciences mathématiques, 2me série, t. IV.

Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1881. — Bulletin des sciences mathématiques, 2me série, t. V.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1883, I, p. 507.

Cf. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 76, p. 177.

3. Es sollen die Functionen, welche einer hinreichend allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form: eine ganze rationale Function der Variabeln, der Function und ihrer ersten Ableitung gleich Null gesetzt, genügen, einer Untersuchung unterzogen werden.

Die Herren Briot und Bouquet haben in ihrer Abhandlung über diesen Gegenstand (Journal de l'école polytechnique, cahier 36, pag. 133—198) für eine solche Untersuchung den Weg geebnet. Diejenigen Mathematiker, welche die von den Verfassern entdeckten Resultate kennen, wissen auch, dass ihre Arbeit den schwierigen und wichtigen Gegenstand, welchen sie zum ersten Male angegriffen haben, noch lange nicht erschöpft hat. Es erscheint wahrscheinlich, dass neue Untersuchungen in derselben Richtung zu Lehrsätzen von hohem analytischen Interesse führen können.

4. Auf die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen ist, wie bekannt, ein helles Licht geworfen worden durch das Studium der speciellen Gleichungen, auf welche die Theilung des Kreises in gleiche Theile und die Theilung des Argumentes der elliptischen Functionen durch eine ganze Zahl führen. Die bemerkenswerthe Transcendente, welche man erhält, indem man den Modul einer elliptischen Function durch den Quotienten der Perioden ausdrückt, führt in ähnlicher Weise zu den Modulargleichungen, welche die Quelle ganz neuer Begriffe und höchst bedeutender Resultate, wie die Auflösung der Gleichung fünften Grades, geworden sind. Aber diese Transcendente ist nur das erste Glied, der einfachste besondere Fall einer unbegrenzten Reihe von neuen Functionen,

3. L'étude des fonctions définies par une équation différentielle suffisamment générale du premier ordre dont le premier membre est un polynome entier et rationnel par rapport à la variable, la fonction et sa première derivée.

MM. Briot et Bouquet ont ouvert la voie à une telle étude dans leur mémoire sur ce sujet (Journal de l'école polytechnique, cahier 36, pag. 133—198). Les géomètres qui connaissent les résultats découverts par ces auteurs, savent aussi que leur travail est loin d'avoir épuisé le sujet difficile et important qu'ils ont abordé les premiers. Il paraît probable que de nouvelles recherches entreprises dans la même direction pourront conduire à des propositions d'un haut intérêt pour l'analyse.

4. On sait quelle lumière a été portée sur la théorie générale des équations algébriques par l'étude de ces équations spéciales auxquelles conduit la division du cercle en parties égales, et la division par un nombre entier de l'argument des fonctions elliptiques. La transcendante si remarquable qu'on obtient en exprimant le module de la théorie des fonctions elliptiques par le quotient des périodes mène semblablement aux équations modulaires qui ont été l'origine de notions entièrement nouvelles, et de résultats d'une grande importance comme la résolution de l'équation du cinquième degré. Mais cette transcendante n'est que le premier terme, le cas particulier le plus simple d'une série infinie de nouvelles fonctions que M. Poincaré a introduites dans la science sous la dé-

welche Herr Poincaré unter dem Namen *fonctions fuchsiennes* in die Wissenschaft eingeführt und mit Erfolg auf die Integration linearer Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung angewandt hat. Diese Functionen, welche also in der Analysis eine Rolle spielen, deren Wichtigkeit auf der Hand liegt, sind bis jetzt vom algebraischen Standpunkte aus noch nicht derselben Betrachtung unterworfen worden, wie die Transcendente der Theorie der elliptischen Functionen, deren Verallgemeinerung sie sind. Es wird die Aufgabe gestellt, diese Lücke auszufüllen und neue, den Modulargleichungen entsprechende, Gleichungen aufzustellen, indem man, sei es auch nur für einen speciellen Fall, den Ausdruck und die Eigenschaften der algebraischen Relationen untersucht, welche zwischen zwei *fonctions fuchsiennes* bestehen, wenn sie eine Gruppe gemeinsam haben.

Falls keine der eingereichten Abhandlungen über einen der vorgeschriebenen Gegenstände des Preises würdig befunden wird, kann derselbe einer eingereichten Abhandlung zuerkannt werden, welche die vollständige Lösung einer wichtigen Frage der Functionentheorie enthält, auch wenn diese keine der von der Commission vorgeschriebenen ist.»

Die eingereichten Abhandlungen, mit einem Motto bezeichnet und von einem versiegelten Couvert begleitet, welches den Namen und die Adresse des Verfassers enthält, sind an den Chefredacteur der Acta Mathematica vor dem ersten Juni 1888 einzusenden.

Die Abhandlung, der Seine Majestät den Preis zuzuerkennen geruhen werden, und dessgleichen die Abhandlung oder

nomination de *fonctions fuchsiennes*, et appliquées avec succès à l'intégration des équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque. Ces fonctions qui ont donc dans l'Analyse un rôle dont l'importance est manifeste, n'ont pas été considérées jusqu'ici sous le point de vue de l'algèbre, comme la transcendante de la théorie des fonctions elliptiques, dont elles sont la généralisation. On propose de combler cette lacune et de parvenir à de nouvelles équations analogues aux équations modulaires, en étudiant ne serait-ce que dans un cas particulier la formation et les propriétés des relations algébriques qui lient deux *fonctions fuchsiennes*, lorsqu'elles ont un groupe commun.

Dans le cas où aucun des mémoires présentés pour le concours sur un des sujets proposés ne serait trouvé digne du prix, ce dernier pourra être adjugé à un mémoire mis en concours contenant la résolution complète d'une question importante de la théorie des fonctions outre celles proposées par la commission.»

Les mémoires presentés au concours devront être munis d'une épigraphe ainsi que du nom et de l'adresse de l'auteur sous pli cacheté et adressés au Rédacteur en chef des Acta Mathematica avant le 1er Juin 1888.

Le mémoire auquel Sa Majesté daignera décerner le prix, ainsi que d'ailleurs le ou les mémoires que la commission

die Abhandlungen, welche die Commission einer ehrenvollen Erwähnung werth erachten wird, werden in den Acta Mathematica abgedruckt werden und es darf keine von ihnen schon früher veröffentlicht sein.

Die Abhandlungen dürfen in jeder Sprache geschrieben sein, welche die Verfasser vorziehen. Da jedoch die Mitglieder der Commission drei verschiedenen Ländern angehören, so wird gewünscht, dass die Verfasser ihrer Originalabhandlung, falls dieselbe nicht bereits französisch geschrieben ist, eine französische Übersetzung beifügen. Im anderen Falle werden die Verfasser zulassen, dass die Commission eine Übersetzung zu ihrem Gebrauche anfertigen lässt.

Der Chefredacteur.

estimera dignes d'une mention honorable, seront insérés dans les Acta Mathematica et aucun entre eux ne doit être publié auparavant.

Les mémoires peuvent être rédigés dans telle langue que l'auteur voudra choisir, mais comme les membres de la commission appartiennent à trois pays différents, l'auteur doit réunir à son mémoire originaire une traduction française si le mémoire n'est pas déjà écrit en français. S'il n'y a pas de telle traduction l'auteur doit accepter que la commission en fasse faire une à son usage.

Le rédacteur en chef.

SUR UN THÉORÈME DE M. FUCHS

PAR

H. POINCARÉ
à PARIS.

Les équations différentielles linéaires jouissent d'une propriété remarquable: Les points singuliers sont les mêmes pour toutes les intégrales. C'est ainsi que pour les équations dont les coëfficients sont des polynômes entiers en x, les points singuliers sont les valeurs de x qui annulent le premier coëfficient. C'est sur cette circonstance qu'est fondée la méthode d'intégration de ces équations par les fonctions zétafuchsiennes.

Les équations non linéaires ne jouissent pas, du moins en général, de la même propriété. Ainsi l'équation très simple

$$xdx + ydy = 0$$

a pour intégrale générale:

$$y = \sqrt{c^2 - x^2}$$

c étant une constante d'intégration. Et les points singuliers $x = \pm c$, dépendent de cette constante et ne sont par conséquent pas les mêmes pour toutes les intégrales.

On est ainsi conduit à rechercher s'il existe, en dehors des équations linéaires, d'autres classes d'équations différentielles dont toutes les intégrales particulières aient les mêmes points singuliers. C'est ce problème que M. Fuchs a très élégamment résolu dans un mémoire intitulée *Ueber Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte be-*

sitzen et inséré aux Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin. (Séance du 26 Juin 1884.)

Je rappelle succinctement les notations employées par le savant géomètre de Berlin et les résultats qu'il a obtenus.

M. Fuchs considère une équation du 1^{er} ordre:

$$F(z, y, y') = 0 \tag{A}$$

où z est la variable indépendante et y' la dérivée $\frac{dy}{dz}$ et dont le premier membre est une polynôme entier en y et en y', ayant pour coëfficients des fonctions *quelconques* de z.

Si l'on considère un instant z comme une constante, l'équation (A) devient une relation algébrique entre y et y'. On appelle p le genre de cette relation.

L'équation

$$D(z, y) = 0 \tag{C}$$

est celle que l'on obtient en éliminant y' entre l'équation (A) et la suivante:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{B}$$

M. Fuchs arrive d'abord à un résultat général qu'il énonce ainsi:

> Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Integrale der Gleichung (A) feste, sich nicht mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschiebende Verzweigungspunkte besitzen, sind die folgenden:
>
> 1. Die Gleichung (A) hat die Form:
>
> $$y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \psi_2 y'^{m-2} + \ldots + \psi_m = 0 \tag{F}$$
>
> worin $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ ganze rationale Functionen von y mit von z abhängigen Coefficienten von der Beschaffenheit bedeuten, dass ψ_k höchstens vom Grade $2k$ in Bezug auf y ist.
>
> 2. Ist $y = \eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung (C) für welche die durch (F) definirte algebraische Function y' von y sich verzweigt so ist η ein Integral der Gleichung (F). In der y' als

algebraische Function von y darstellenden RIEMANN'schen Fläche hat y' in sämmtlichen über $y = \eta$ liegenden Verzweigungsstellen den Werth $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$.

3. Je α Blättern, welche sich in $y = \eta$, $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$ verzweigen, entsprechen mindestens $\alpha - 1$ mit $y = \eta$ zusammenfallende Wurzeln der Gleichung

$$F(z, y, \zeta) = 0$$

mit der Unbekannten y.

En d'autres termes; l'équation (A) devra satisfaire aux conditions suivantes:

1°. La fonction y' définie par cette équation ne pourra devenir infinie que lorsque y sera lui-même infini, ou pour certaines valeurs particulières de z.

2°. Si l'on pose $y_1 = \frac{1}{y}$, $y_1' = \frac{dy_1}{dz}$, l'équation (A) deviendra:

$$(A_1) \qquad F_1(z, y_1, y_1') = 0;$$

y_1' ne devra pouvoir devenir infinie, si y_1 est nul, que pour certaines valeurs particulières de z.

3°. Les équations:

$$F = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

devront définir des intégrales singulières de l'équation (A).

4°. En différentiant l'équation (A), on trouve:

$$\frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dz} + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dz} = 0.$$

On devra avoir identiquement:

$$\frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dz} = PF + Q\frac{dF}{dy'}$$

P et Q étant des polynômes entiers en y et en y', ayant pour coëfficients des fonctions de z.

Il est aisé de comprendre l'importance de ces résultats. Supposons en effet que F soit un polynôme entier, non seulement par rapport à y

et à y', mais encore par rapport à z. Alors, si les conditions précédemment énoncées sont remplies, le nombre des points singuliers est fini et ces points peuvent même être regardés comme donnés, de sorte que la méthode d'intégration des équations linéaires par les fonctions fuchsiennes est applicable, au moins dans ses traits essentiels. On pourrait donc ainsi concevoir l'espoir de découvrir une classe nouvelle d'équations différentielles intégrables par ces transcendantes. Dans le cas même où F n'est pas un polynôme entier par rapport à z, le résultat reste fort important.

Mais pour en tirer tous les fruits, il est indispensable de faire des conditions précédemment énoncées une étude plus approfondie. Cette étude a été commencée et poussée assez loin par M. Fuchs et je désirerais ici la pousser plus loin encore, afin d'arriver à des conclusions définitives.

Le nombre que nous avons appelé plus haut p joue dans cette étude un rôle capital.

1°. Supposant d'abord $p = 0$, M. Fuchs pose

$$y = \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_0(t)}, \qquad y' = \frac{\Phi_2(t)}{\Phi_0(t)}$$

Φ_0, Φ_1 et Φ_2 désignant des polynômes entiers en t, dont les coëfficients dépendent de z. Il arrive ainsi à l'équation

$$\frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$$

où A_0, A_1, A_2 sont des fonctions de z. C'est l'équation de Riccati qu'il est aisé de ramener, comme on sait, aux équations linéaires du 2^d ordre. Ainsi dans le cas de $p = 0$, on n'obtient pas de classe réellement nouvelle d'équations différentielles satisfaisant aux conditions énoncées.

Dans ce premier cas, je n'ai rien à ajouter aux résultats obtenus par M. Fuchs.

Ce savant géomètre, examinant ensuite le cas de $p = 1$, pose:

$$y = \frac{\Phi_1 + \Psi_1\sqrt{R(t)}}{\Phi_0 + \Psi_0\sqrt{R(t)}}, \qquad y' = \frac{\Phi_2 + \Psi_2\sqrt{R(t)}}{\Phi_0 + \Psi_0\sqrt{R(t)}}$$

les Φ, les Ψ et R étant des polynômes entiers en t avec des coëfficients dépendant de z, et R en particulier étant du 4^e degré en t.

L'équation (A) est alors ramenée à la forme:

$$\frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \lambda\sqrt{R(t)} \tag{1}$$

où les A et λ sont des fonctions de z.

On déduit alors de l'énoncé de M. Fuchs, cité plus haut, la condition suivante

$$\frac{dR}{dz} + \frac{dR}{dt}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = (B_0 + B_1 t) R(t) \tag{2}$$

B_0 et B_1 étant des fonctions de z.

On peut pousser plus loin encore l'étude de cette condition à laquelle s'arrête le célèbre analyste que non citons.

Soit:

$$R(t) = (t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta) \tag{3}$$

α, β, γ et δ étant des fonctions de z. Posons:

$$t = \frac{au+b}{cu+d} \tag{4}$$

a, b, c, d étant des fonctions de z que nous déterminerons plus complètement dans la suite et auxquelles nous imposerons d'abord la condition:

$$ad - bc = 1.$$

Les équations (1), (2) et (3) vont se transformer. En posant:

$$\alpha = \frac{a\alpha' + b}{c\alpha' + d}, \qquad \beta = \frac{a\beta' + b}{c\beta' + d}, \qquad \gamma = \frac{a\gamma' + b}{c\gamma' + d}, \qquad \delta = \frac{a\delta' + b}{c\delta' + d}$$

on aura:

$$R(t) = \frac{(u-\alpha')(u-\beta')(u-\gamma')(u-\delta')}{(cu+d)^4(c\alpha'+d)(c\beta'+d)(c\gamma'+d)(c\delta'+d)} = \frac{R_1}{(cu+d)^4 M}$$

M étant une fonction de z,

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 = \frac{A_0'' + A_1'' u + A_2'' u^2}{(cu+d)^2}; \qquad B_0 + B_1 t = \frac{B_0' + B_1' u}{cu+d}$$

les A'' et les B' étant des fonctions de z. Il vient ensuite

$$\frac{dt}{dz} = \frac{du}{dz(cu+d)^2} + \frac{C_0 + C_1 u + C_2 u^2}{(cu+d)^2}$$

d'où, en posant,

$$A_0'' - C_0 = A_0', \qquad A_1'' - C_1 = A_1', \qquad A_2'' - C_2 = A_2'$$

on tirera:

$$\frac{du}{dz} = A_0' + A_1' u + A_2' u^2 + \lambda\sqrt{R_1}$$

et on trouverait aisément:

$$\frac{dR_1}{dz} + \frac{dR_1}{du}(A_0' + A_1' u + A_2' u^2) = (B_0' + B_1' u) R_1.$$

Ainsi la forme des équations (1), (2) et (3) n'est pas changée par la transformation (4), ce qu'il était d'ailleurs facile de prévoir.

Nous déterminerons a, b, c, d en fonction de z par les conditions:

$$d\alpha - b = (c+d)\beta - (a+b) = (d-c)\gamma - (b-a) = 0$$

qu'il est toujours possible de remplir et qui entraînent:

$$\alpha' = 0, \qquad \beta' = 1, \qquad \gamma' = -1.$$

D'où la conclusion suivante:

Il est toujours permis de supposer:

$$R(t) = t(t^2-1)(t-\delta)$$

δ étant une fonction de z qui définit le module des fonctions elliptiques engendrées par $\sqrt{R}$. C'est l'hypothèse que nous ferons désormais.

L'équation (2) devient alors:

$$t(1-t^2)\frac{d\delta}{dz} + \frac{dR}{dt}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = (B_0 + B_1 t) R.$$

Faisons successivement dans cette équation:

$$t = 0, \qquad t = 1, \qquad t = -1,$$

elle deviendra:

$$\frac{dR}{dt}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = 0, \qquad (t = -1, 0, 1).$$

Mais $\frac{dR}{dt}$ ne saurait s'annuler pour une de ces trois valeurs de t, sans quoi δ serait égal à -1, à 0, ou à 1, et le nombre p ne serait plus égal à 1, mais à 0. On a donc:

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 = 0, \qquad (t = -1, 0, 1)$$

d'où

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0.$$

L'équation (2) se réduit alors à:

$$t(1 - t^2)\frac{d\delta}{dz} = (B_0 + B_1 t) R.$$

Si dans cette équation on fait $t = \delta$, il reste:

$$\frac{d\delta}{dz} = 0.$$

Ainsi δ est une constante.

Si on regarde un instant z comme une constante, l'équation (A) devient une relation algébrique de genre p. Cette relation définit une certaine surface de Riemann S qui dépend de z. Ici $p = 1$; donc à chacune de ces surfaces de Riemann correspond un système de fonctions elliptiques et le module de ces fonctions pourra s'appeler le module de la surface S.

Il résulte de ce qui précède que le module de la surface S est invariable.

Cela posé, l'équation (1) devient:

$$\frac{dt}{dz} = \lambda\sqrt{R}$$

ou:

$$\frac{dt}{\sqrt{R}} = \lambda dz.$$

R ne dépend que de t et λ ne dépend que de z; les variables sont donc séparées.

Posons $\lambda = \frac{d\mu}{dz}$, μ étant une fonction de z. L'inversion de la relation

$$\frac{dt}{\sqrt{R}} = d\mu$$

donnera:

$$t = \varphi(\mu + c)$$

φ étant l'algorithme d'une fonction doublement périodique et c étant la constante d'intégration.

Les points singuliers de la fonction t, seront ceux de la fonction μ; ils seront donc indépendants de la constante d'intégration et seront les mêmes pour toutes les intégrales.

Ainsi dans le cas de $p = 1$, comme dans celui de $p = 0$, nous ne sommes pas conduits à une classe réellement nouvelle d'équations différentielles.

Il reste à examiner le cas de $p > 1$, laissé de côté par M. Fuchs.

Une petite digression sur les surfaces de Riemann est ici nécessaire.

Soit:

$$f_0(y_0, y_0') = 0$$

une relation algébrique de genre p, définissant une surface de Riemann S_0.

Soit

$$f_1(y_1, y_1') = 0$$

une relation de même genre définissant une surface de Riemann S_1.

Les deux surfaces S_0 et S_1 seront dites équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle, c'est à dire en établissant entre les deux points analytiques (y_0, y_0'), (y_1, y_1'), une relation telle que y_1 et y_1' puissent s'exprimer rationnellement en fonctions de y_0 et y_0'; et réciproquement.

On sait qu'il y a certains invariants qui ne sont pas altérés par les transformations birationnelles; ce sont les *modules*. Il y a $3p - 3$ modules pour une surface de Riemann de genre $p > 1$ et 1 module pour une surface de genre 1. Deux surfaces de Riemann équivalentes ont donc mêmes modules.

Reprenons maintenant l'équation (A) et considérons-la comme représentant une surface de Riemann S variable avec z. Je dis que les modules de cette surface S seront constants et indépendants de z.

En effet partons de la valeur initiale z_0 de z, à laquelle correspond une certaine surface de RIEMANN S_0. Soient y_0 et y'_0 les valeurs initiales d'une certaine intégrale de l'équation (A) et de sa dérivée; le point analytique (y_0, y'_0) appartiendra à la surface S_0.

Allons ensuite du point z_0 au point z_1 *en suivant un chemin déterminé*. La surface de RIEMANN que nous avons appelée S et qui pour $z = z_0$ se réduisait à S_0, variera avec z et pour $z = z_1$, se réduira à S_1. Pour $z = z_1$, l'intégrale considérée et sa dérivée se réduiront à y_1 et y'_1 et le point analytique (y_1, y'_1) appartiendra à la surface S_1.

Faisons maintenant varier sur la surface S_0 le point analytique (y_0, y'_0) qui définit les valeurs initiales correspondant à l'intégrale envisagée, mais conservons des valeurs invariables à z_0 et à z_1 et ne faisons pas varier non plus le chemin qui mène de z_0 à z_1. Dans ces conditions, les surfaces S_0 et S_1 ne varieront pas, mais l'intégrale considérée variera et dépendra des valeurs initiales y_0 et y'_0 que l'on aura choisies. Par conséquent y_1 et y'_1 seront des fonctions de y_0 et de y'_0.

Je dis que ce seront des fonctions uniformes et continues du point analytique (y_0, y'_0). En effet si l'on se donne les valeurs initiales y_0 et y'_0, l'intégrale qui correspondra à ces valeurs initiales sera entièrement déterminée. Cette intégrale considérée comme fonction de z, peut prendre pour $z = z_1$ des valeurs différentes. Mais parmi elles, il y en a une, qui est celle que nous avons appelée y_1 et qui est celle que l'on obtient en allant du point z_0 au point z_1 par le chemin particulier que nous avons choisi. Cette valeur y_1 ainsi définie est parfaitement déterminée. C'est donc une fonction uniforme du point analytique (y_0, y'_0).

Cette fonction uniforme pourrait toutefois être discontinue. Voyons comment cela pourrait arriver, par un exemple simple. Reprenons l'équation:

$$zdz + ydy = 0$$

et son intégrale:

$$y = \sqrt{c^2 - z^2}.$$

Soit $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et allons du point 0 au point 1 par la droite qui joint ces deux points. Il viendra:

$$y_0 = c$$

et

$$y_1 = \pm\sqrt{c^2 - 1} = \pm\sqrt{y_0^2 - 1}.$$

Ainsi y_1 est exprimé en fonction de y_0. Il reste toutefois pour le définir complètement à décider si l'on doit prendre le signe $+$ ou le signe $-$. Supposons d'abord que la partie imaginaire de y_0 soit positive. Posons:

$$2y_0 = \left(t + \frac{1}{t}\right)\cos\varphi + i\left(t - \frac{1}{t}\right)\sin\varphi$$

t et φ étant des quantités réelles et telles que

$$0 \leqq \varphi < 2\pi, \qquad t \geqq 1.$$

Cela est toujours possible et d'une seule manière, sauf une exception dont nous parlerons plus loin. Il viendra:

$$2\sqrt{y_0^2 - 1} = \pm\left[\left(t - \frac{1}{t}\right)\cos\varphi + i\left(t + \frac{1}{t}\right)\sin\varphi\right].$$

Cela posé, pour déterminer le signe qu'il faut prendre, faisons varier z de 0 à 1, en suivant la droite qui joint ces deux points.

Nous écrivons:

$$2y_0 = \left(u + \frac{z^2}{u}\right)\cos\psi + i\left(u - \frac{z^2}{u}\right)\sin\psi$$

$$0 \leqq \psi < 2\pi, \qquad u \geqq z;$$

ψ devra se réduire à φ et u à 1 pour $z = 1$. Il viendra:

$$2\sqrt{y_0^2 - z^2} = \pm\left[\left(u - \frac{z^2}{u}\right)\cos\psi + i\left(u + \frac{z^2}{u}\right)\sin\psi\right]$$

et comme cette expression devra se réduire à $2y_0$ pour $z = 0$, il faudra prendre le signe $+$ et il viendra:

$$2y_1 = \left(t - \frac{1}{t}\right)\cos\varphi + i\left(t + \frac{1}{t}\right)\sin\varphi.$$

Cette expression n'est pas une fonction continue de y_0. Soit en effet

$$t = 1 + \varepsilon$$

ε étant infiniment petit. Les deux valeurs de $2y_0$:

$$\left(1+\varepsilon+\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\cos\varphi+i\left(1+\varepsilon-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\sin\varphi=2\cos\varphi+\text{ inf. petit.}$$

et

$$\left(1+\varepsilon+\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\cos(-\varphi)+i\left(1+\varepsilon-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\sin(-\varphi)=2\cos\varphi+\text{ inf. petit.}$$

sont infiniment voisines, tandis que les valeurs correspondantes de $2y_1$:

$$\left(1+\varepsilon-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\cos\varphi+i\left(1+\varepsilon+\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\sin\varphi=2i\sin\varphi+\text{ inf. petit.}$$

et

$$\left(1+\varepsilon-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\cos(-\varphi)+i\left(1+\varepsilon+\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\sin(-\varphi)=-2i\sin\varphi+\text{inf. petit}$$

ne sont pas infiniment voisines comme elles devraient l'être si y_1 était fonction continue de y_0.

A quoi tient ce fait? Supposons que y_0 soit réel et compris entre -1 et $+1$. Alors il faudra prendre $t=1$. Et pour l'angle φ nous aurons deux valeurs distinctes satisfaisant toutes deux à la condition:

$$\cos\varphi=y_0.$$

D'ailleurs rien dans les hypothèses faites jusqu'ici, ne nous permettra de décider entre ces deux valeurs de φ qui conduisent pour y_1 à deux valeurs égales et de signe contraire. Rendons-nous compte de la raison d'être de cette anomalie. Supposons que nous ayons donné à y_0 une valeur réelle comprise entre -1 et $+1$. L'intégrale correspondante

$$y=\sqrt{y_0^2-z^2}$$

présentera un point de ramification

$$z=|y_0|$$

situé sur la droite qui joint le point $z=0$ au point $z=1$, c'est à dire sur le chemin même que nous sommes convenus de suivre pour aller du premier de ces points au second. Quand la variable z, en suivant ce

chemin, aura franchi ce point de ramification, rien dans les hypothèses faites ne nous permettra de décider quel signe il faut attribuer au radical $\sqrt{y_0^2 - z^2}$.

Je suis entré dans d'assez longs détails sur ce cas simple et j'espère avoir fait comprendre comment y_1 pourrait être une fonction discontinue de y_0.

Cela arriverait si l'un des points du chemin que nous suivons pour aller de z_0 à z_1 était un point de ramification pour l'une des intégrales. Mais rien de pareil n'est à craindre dans le cas qui nous occupe. Nous avons supposé en effet que les points de ramification étaient les mêmes pour toutes les intégrales et par conséquent qu'il ne pouvait y avoir de points de ramification des intégrales que pour certaines valeurs particulières de z.

Or nous aurons toujours pu choisir le chemin qui va de z_0 à z_1 de telle sorte qu'il ne passe par aucune de ces valeurs particulières.

Donc y_1 est une fonction uniforme et continue de y_0 et y_0'.

Il est aisé de voir que cette fonction n'a d'autres singularités que des pôles.

Donc y_1 est une fonction rationnelle de y_0 et y_0'.

Pour la même raison, y_1' est une fonction rationnelle de y_0 et y_0'; et de même y_0 et y_0' sont des fonctions rationnelles de y_1 et y_1'.

Donc on peut passer de S_0 à S_1 par une transformation birationnelle.

Donc ces deux surfaces de Riemann ont mêmes modules.

Donc les modules de la surface S sont indépendants de z.

C. Q. F. D.

C'est le résultat que nous avions obtenu plus haut pour le cas de $p = 1$ et qui est étendu ainsi au cas général.

Pour pousser plus loin cette étude, il est nécessaire de dire quelques mots des transformations birationnelles des surfaces de Riemann en elles-mêmes.

Une surface de genre 0 peut se transformer en elle-même par une infinité de transformations birationnelles formant un groupe continu à trois paramètres. Soit en effet

$$f(x, y) = 0 \tag{5}$$

une relation algébrique de genre o et S la surface de Riemann correspondante, on posera:

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t)$$

φ et ψ étant rationnels. Si ensuite on pose

$$t'=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$$

α, β, γ et δ étant des constantes quelconques, puis:

$$x'=\varphi(t'), \qquad y'=\psi(t')$$

x' et y' seront fonctions rationnelles de x et y et réciproquement, on aura ainsi une triple infinité de transformations birationnelles de la surface S en elle-même.

Les transformations birationnelles d'une surface de genre 1 en elle-même forment encore un groupe continu, mais ce groupe ne contient plus qu'un seul paramètre. Supposons en effet que la relation (5) et par conséquent la surface S soit de genre 1 et non plus de genre o. Nous poserons:

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t)$$

φ et ψ étant des fonctions doublement périodiques avec les périodes ω et ω'. Soient

$$x'=\varphi(t'), \qquad y'=\psi(t')$$

un autre système de valeurs satisfaisant à la relation (5) et supposons que x' et y' puissent s'exprimer rationnellement en x et y, et réciproquement. On verra:

1° que t' est une fonction entière de t.

2° que t est une fonction entière de t'.

3° que l'on a entre t et t' une relation de la forme:

$$\alpha t+\beta t'+\gamma=0$$

α, β et γ étant des constantes.

4° que lorsque t augmente d'une période, t' doit augmenter aussi d'une période et réciproquement. Si par exemple t augmente de ω, t'

devra augmenter de $m\omega + n\omega'$, m et n étant des entiers. Il vient donc:

$$\alpha\omega + \beta(m\omega + n\omega') = 0$$

et de même:

$$\alpha\omega' + \beta(m'\omega + n'\omega') = 0$$

$$\alpha(m_1\omega + n_1\omega') + \beta\omega = 0$$

$$\alpha(m_1'\omega + n_1'\omega') + \beta\omega = 0.$$

Les deux dernières équations sont des conséquences des deux premières pourvu que l'on suppose: $mn' - m'n = 1$. Cette condition est d'ailleurs nécessaire pour que les quatre équations soient compatibles. Nous remplacerons donc nos quatre équations par les trois suivantes:

$$(\alpha + \beta m)\omega + \beta n\omega' = \beta m'\omega + (\alpha + \beta n')\omega' = 0$$

$$mn' - m'n = 1.$$

Ces équations peuvent être satisfaites de deux manières:

1°. En faisant

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -1, \qquad m = n' = 1, \qquad m' = n = 0$$

d'où:

$$t' = t + \gamma.$$

On est ainsi conduit à une simple infinité de transformations de la surface S en elle-même, dépendant d'un seul paramètre γ et formant un groupe continu.

2°. Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est donné par l'équation:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta(m + n') = 0.$$

De plus ce rapport ne doit pas être réel, (si on laisse de côté le cas que nous venons de traiter et celui que nous allons traiter plus loin) sans quoi le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ serait lui-même réel. On devra donc avoir:

$$m + n' = 0, \ 1 \quad \text{ou} \quad -1.$$

Il est aisé de déduire de là que le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ doit avoir une des valeurs

$$(6) \qquad \frac{\lambda e^{\frac{ki\pi}{6}} + \mu}{\lambda' e^{\frac{ki\pi}{3}} + \mu'}$$

k, λ, μ, λ', μ' étant des entiers tel que

$$\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1, \qquad k \equiv (2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9 \text{ ou } 10) \pmod{12}.$$

Ce cas ne pourra donc se présenter que pour certaines valeurs particulières du module de la surface S. Pour ces valeurs, la surface S admettra outre le groupe continu trouvé plus haut, une autre transformation dont la puissance 3^e^, 4^e^ ou 6^e^ se confondra avec la substitution identique, ainsi que les diverses puissances de cette transformation et les combinaisons de ces puissances avec les diverses transformations du groupe continu.

3°. On peut enfin satisfaire à nos trois équations en faisant:

$$t = -t'$$

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad m = n' = -1, \qquad m' = n = 0.$$

On est ainsi conduit à une transformation T de la surface S en elle-même. Si l'on appelle τ une transformation quelconque du groupe continu trouvé plus haut, toutes les transformations birationnelles de la surface S en elle-même sont comprises dans l'une des formules

$$\tau \quad \text{et} \quad \tau T.$$

Il n'y a d'exception que si le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ prend l'une des valeurs (6).

Les considerations qui précèdent ne présentent aucune difficulté, je les ai pourtant développées avec détail parce que j'ai l'intention d'appliquer une méthode tout à fait analogue à la recherche des transformations des surfaces de genre $p > 1$.

Ces surfaces ne peuvent être transformées en elles-mêmes que d'un nombre fini de manières.

Ce théorème était soupçonné depuis longtemps, mais la démonstration

a longtemps arrêté les géomètres. Elle a été trouvée il y a quelques années par M. KLEIN.

Voici en effet ce que ce géomètre me fit l'honneur de m'écrire à la date du 3 Avril 1882.

> *Eine Reihe von Theoremen über algebraische Functionen beweist man vermöge der neuen η Function sofort* (fonction intimement liée aux fonctions fuchsiennes). *Zum Beispiel den Satz, den ich in meiner Schrift über RIEMANN nur erst als wahrscheinlich bezeichnete, dass nämlich eine Fläche $p > 1$ niemals unendlich viele discrete eindeutige Transformationen in sich besitzen kann (vermöge deren sie in eine ∞ Zahl äquivalenter Fundamentalpolygone zerlegt erscheinen würde).*

Il est facile de reconstituer dans tous ses détails la démonstration de M. KLEIN.

Reprenons en effet la relation (5) et supposons que cette relation et par conséquent la surface S soient de genre $p > 1$. Nous poserons:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

$\varphi(t)$ et $\psi(t)$ étant des fonctions fuchsiennes dont le polygone générateur R_0 aura $4p$ côtés, les côtés opposés étant conjugués. Tous les sommets formeront un seul cycle et la somme des angles sera égale à 2π (cf. *Théorie des groupes fuchsiens*, Acta Mathematica, T. 1, p. 23 et 42; et *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, Acta Mathematica, T. 1, p. 256 et suiv.). Cela est toujours possible (cf. *Mémoire sur les groupes des équations linéaires*, Acta Mathematica, T. 4, p. 272 et 276).

Soient:

$$x' = \varphi(t'), \qquad y' = \psi(t')$$

et supposons que x' et y' soient fonctions rationnelles de x et de y, et réciproquement. Qu'arrivera-t-il si l'on étudie t' comme fonction de t? En premier lieu, tant que t reste intérieur au cercle fondamental, t' est une fonction holomorphe de t.

De plus t' reste intérieur au cercle fondamental.

Réciproquement quand t' reste intérieur au cercle fondamental, t est fonction holomorphe de t' et reste intérieur au cercle fondamental.

On en déduit aisément (cf. *Mémoire sur les groupes des équations linéaires,* p. 231) que

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

la substitution:

$$\sigma = \left(t, \ \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$$

conservant le cercle fondamental.

Soit maintenant G le groupe des fonctions fuchsiennes $\varphi(t)$ et $\psi(t)$. Je dis qu'il est permutable à la substitution σ. Soit en effet τ une substitution quelconque du groupe G: je dis que $\sigma^{-1}\tau\sigma$ fera aussi partie de ce groupe. En effet, τ faisant partie de G, on aura:

$$x = \varphi(t) = \varphi(t.\tau), \qquad y = \psi(t) = \psi(t.\tau)$$

d'où:

$$R[\varphi(t), \ \psi(t)] = R[\varphi(t.\tau), \ \psi(t.\tau)]$$

R étant l'algorithme d'une fonction rationnelle quelconque. D'autre part on a, par hypothèse:

$$x' = \varphi(t.\sigma) = R_1[\varphi(t), \ \psi(t)]$$

$$y' = \psi(t.\sigma) = R_2[\varphi(t), \ \psi(t)]$$

et de même

$$\varphi(t.\tau.\sigma) = R_1[\varphi(t.\tau), \ \psi(t.\tau)]$$

$$\psi(t.\tau.\sigma) = R_2[\varphi(t.\tau), \ \psi(t.\tau)]$$

d'où:

$$\varphi(t\tau\sigma) = \varphi(t\sigma), \qquad \psi(t\tau\sigma) = \psi(t\sigma)$$

ou en changeant t en $t\sigma^{-1}$

$$\varphi(t\sigma^{-1}\tau\sigma) = \varphi(t), \qquad \psi(t\sigma^{-1}\tau\sigma) = \psi(t).$$

Donc la substitution $\sigma^{-1}\tau\sigma$ fait partie du groupe G.

C. Q. F. D.

Les substitutions linéaires permutables au groupe G et conservant le cercle fondamental forment un groupe G'. Ce groupe G' contient

évidemment le groupe G; en d'autres termes G est un sous-groupe de G', et on voit aisément qu'à toute substitution de G', n'appartenant pas à G, correspondra une transformation birationnelle de la surface S en elle-même.

Remarquons de plus que d'après la définition même de G', G est un »sous-groupe distingué» de G'.

Mais il y a deux espèces de sous-groupes: les sous-groupes d'indice fini (qui sont tels qu'on obtient toutes les substitutions du groupe principal, en prenant la résultante des diverses substitutions du sous-groupe et *d'un nombre fini* d'autres substitutions) et les sous-groupes d'indice infini.

Je me propose de démontrer que G est un sous-groupe d'indice fini, et par conséquent que la surface S n'admet qu'un nombre fini de transformations birationnelles en elle-même.

J'établirai d'abord que G' est un groupe fuchsien, c'est à dire un groupe proprement discontinu. En effet s'il ne l'était pas, il serait ou bien continu (c'est à dire qu'il contiendrait des substitutions infinitésimales), ou bien improprement discontinu. (Cf. *Théorie des groupes kleinéens*, Acta Mathematica, T. 3, p. 57.)

1°. Il ne peut pas être continu; car s'il contenait une substitution infinitésimale σ, cette substitution serait permutable, non seulement au groupe G, *mais à toutes les substitutions de ce groupe.*

Soient en effet

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2p}$$

les substitutions fondamentales de G. D'après les hypothèses faites, les substitutions

$$\sigma^{-1}\tau_1\sigma, \sigma^{-1}\tau_2\sigma, \ldots, \sigma^{-1}\tau_{2p}\sigma$$

feront également partie du groupe G. Mais ces substitutions diffèrent infiniment peu de

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2p}$$

puisque σ est infinitésimale. Mais le groupe G étant discontinu ne devra contenir aucune substitution infinitésimale, il ne pourra donc contenir deux substitutions distinctes, mais différant infiniment peu l'une de l'autre. Donc on a:

$$\tau_i = \sigma^{-1}\tau_i\sigma, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Donc σ est permutable aux substitutions fondamentales de G; elle est

donc permutable à *toutes* les substitutions de ce groupe, qui n'en sont que des combinaisons.

Mais je dis qu'on ne saurait trouver de substitution linéaire permutable à toutes les substitutions de G. En effet pour que deux substitutions linéaires Σ et Σ' soient permutables, il faut et il suffit, ou bien qu'elles aient mêmes points doubles (les deux points doubles pouvant dans certains cas se confondre en un seul), ou bien qu'elles aient toutes deux pour multiplicateur -1 et que les quatre points doubles soient conjugués harmoniques.

Nous n'avons pas besoin de nous inquiéter de ce second cas de permutabilité. En effet une substitution infinitésimale ne peut avoir pour multiplicateur -1. Si donc le groupe G' contenait une substitution infinitésimale σ, toutes les substitutions de G devraient avoir mêmes points doubles que σ; elles seraient donc toutes permutables entre elles, ce qui n'a pas lieu.

Donc G' ne peut être continu.

2°. G' ne peut pas non plus être improprement discontinu. J'ai démontré en effet (*Groupes kleinéens*, p. 58) que tout groupe formé de substitutions linéaires conservant le cercle fondamental, et ne contenant pas de substitution infinitésimale, est proprement discontinu à l'intérieur du cercle fondamental.

Donc G' est un groupe fuchsien.

Il aura donc un polygone générateur R'_0, et l'indice de G considéré comme sous-groupe de G' sera égal à la S de R_0 (polygone générateur de G) divisée par la S de R'_0. (Cf. *Mémoire sur les groupes des équations linéaires*, Acta Mathematica, T. 4, p. 285.) Or la S de R_0 est finie, donc G est un sous-groupe d'indice fini. C. Q. F. D.

En général, le groupe G' ne diffère pas du groupe G, de sorte que la surface S n'admet aucune transformation birationnelle en elle-même. Elle ne peut en avoir que dans des cas exceptionnels qui correspondent évidemment aux différents cas de symétrie que peut présenter le polygone R_0.

Soient maintenant deux surfaces de Riemann S_0 et S_1, équivalentes, et de genre p.

Si l'on peut passer de l'une à l'autre par deux transformations

birationnelles T et U, la transformation TU^{-1} changera en elle-même la surface S_0.

D'où les conclusions suivantes:

1°. Si $p = 0$, on peut passer de S_0 à S_1 par une triple infinité de transformations birationnelles;

2°. Si $p = 1$, on peut passer de S_0 à S_1 par une simple infinité de transformations birationnelles.

3°. Si $p > 1$, il n'y a en général qu'une seule transformation birationnelle qui permette de passer de S_0 à S_1, et il n'y en a jamais qu'un nombre fini.

Grâce à ces propositions, il est aisé de retrouver les résultats que nous avons démontrés plus haut pour les cas de $p = 0$ et de $p = 1$ et de traiter complètement le cas de $p > 1$.

Reprenons en effet l'équation:

$$F(y, y', z) = 0 \tag{A}$$

et soit d'abord $p = 0$. On pourra poser:

$$y = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t)$$

φ et ψ étant des fonctions rationnelles de t dont les coëfficients dépendent de z.

Soit $y_0 = \varphi(t_0)$, $y_0' = \psi(t_0)$ les valeurs initiales d'une certaine intégrale et de sa dérivée pour $z = z_0$, et

$$y_1 = \varphi(t_1), \qquad y_1' = \psi(t_1)$$

les valeurs de cette même intégrale et de sa dérivée pour $z = z_1$. On a vu que y_1 et y_1' doivent être fonctions rationnelles de y_0 et y_0' et réciproquement. On aura donc

$$t_1 = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta}.$$

Les coëfficients de cette substitution linéaire $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dépendent évidemment de z_0 et de z_1. Nous regarderons z_0 comme une constante, et z_1

sera la variable indépendante; nous supprimerons donc l'indice 1 de t_1, z_1, y_1, y'_1 et nous aurons

$$t = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta} \tag{6}$$

où t_0 sera la constante d'intégration et où α, β, γ, δ seront des fonctions de z. Si α', β', γ', δ' sont les dérivées de ces fonctions; il viendra:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{(\alpha' t_0 + \beta')(\gamma t_0 + \delta) - (\gamma' t_0 + \delta')(\alpha t_0 + \beta)}{(\gamma t_0 + \delta)^2}. \tag{7}$$

En éliminant t_0 entre (6) et (7) on retomberait sur l'équation de Riccati, ce qui confirme le résultat obtenu plus haut.

Si on remplace t par sa valeur (6) dans l'expression

$$y = \varphi(t)$$

on trouve pour l'intégrale générale de l'équation (A):

$$y = R(t_0)$$

R étant une fonction rationnelle de la constante d'intégration t_0 et dont les coëfficients dépendent de z.

Réciproquement si l'on a une fonction y de t_0 et de z, rationnelle par rapport à t_0, et que l'on forme la dérivée $y' = \frac{dy}{dz}$, on obtiendra par l'élimination de t_0 une équation différentielle de la forme (A) entre y, y' et z.

Si en particulier l'équation (A) est algébrique, non seulement par rapport à y et à y', mais encore par rapport à z, l'équation de Riccati à laquelle on sera conduit aura ses coëfficients algébriques en z, et par conséquent l'intégration de l'équation (A) sera ramenée à celle des équations linéaires du 2[d] ordre à coëfficients algébriques.

Supposons maintenant $p = 1$. Nous pourrons poser:

$$y = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t)$$

φ et ψ étant des fonctions doublement périodiques de t dont les coëfficients dépendent de z. Conservons aux notations

$$z_0,\ z_1, \qquad y_0 = \varphi(t_0), \qquad y'_0 = \psi(t_0), \qquad y_1 = \varphi(t_1), \qquad y'_1 = \psi(t_1)$$

le même sens que plus haut. On sait que y_1 et y'_1 doivent être des fonctions rationnelles de y_0 et y'_0 et réciproquement. Donc d'après ce qu'on a vu plus haut sur les transformations des surfaces de genre 1 en elles mêmes, on devra avoir:

$$t_1 = \alpha t_0 + \beta$$

α étant égal à l'une des quantités:

$$1, \qquad -1, \qquad e^{\frac{2ki\pi}{3}}, \qquad -e^{\frac{2ki\pi}{3}}, \qquad \pm i.$$

Comme α et β doivent être des fonctions continues de z_1 et que t_1 doit se réduire à t_0 pour $z_0 = z_1$, on aura

$$\alpha = 1, \qquad t_1 = t_0 + \beta.$$

Considérons z_0 comme constant, z_1 comme variable et supprimons l'indice 1 de z_1, t_1, y_1, y'_1.

β sera une fonction de z et l'intégrale générale de l'équation (A) sera:

$$y = \varphi(t_0 + \beta)$$

φ étant une fonction doublement périodique dont les coëfficients dépendront de z, β une fonction de z, et t_0 la constante d'intégration.

Si l'équation (A) est algébrique en z, les coëfficients de la fonction doublement périodique $\varphi(t)$ dépendent *algébriquement* de z; et la fonction β de z s'obtient par une simple quadrature. Posons:

$$u = \mathrm{sn}(t)$$

y sera une fonction algébrique de u et de z, si l'équation (A) est algébrique en z. Si l'équation (A) n'est pas algébrique en z et si elle s'écrit:

$$\sum A_{mp} y^m y'^p = 0$$

où les coëfficients A_{mp} sont des fonctions non algébriques de z, y sera une fonction algébrique de u et des coëfficients A_{mp}. Dans tous les cas on aura:

$$u = \mathrm{sn}(t_0 + \beta)$$

t_0 étant la constante d'intégration. On reconnaît là le résultat obtenu plus haut.

Arrivons enfin au cas de $p > 1$. Faisons d'abord $z = z_0$ dans l'équation (A); cette équation représentera une certaine surface de RIEMANN S_0. Si l'on y fait $z = z_1$, on aura une surface équivalente S_1. Cette seconde surface dérive de la première par une seule transformation birationnelle ou par un nombre fini de pareilles transformations.

Soit

$$(A_0) \qquad F_0(y_0, y_0') = 0, \qquad (A_1) \qquad F_1(y_1, y_1') = 0$$

les équations de ces deux surfaces de RIEMANN. On passera de l'une à l'autre en posant:

$$(8) \qquad y_1 = R(y_0, y_0'), \qquad y_1' = R_1(y_0, y_0')$$

R et R_1 représentant des fonctions rationnelles. Ces fonctions rationnelles R et R_1 sont telles que l'élimination de y_0, y_0' entre l'équation (A_0) et les équations (8) conduit à l'équation (A_1). D'après ce que nous venons de voir, il n'y a qu'un nombre fini de fonctions rationnelles qui jouissent de la même propriété.

Donc quand on connaîtra les équations (A_0) et (A_1) on pourra trouver les deux fonctions rationnelles R et R_1 *par des procédés purement algébriques.*

Comme les coëfficients de (A_0) et (A_1) dépendent de z_0 et de z_1, il en sera de même des coëfficients de R et R_1. Si nous regardons z_0 comme une constante, z_1 comme la variable indépendante, puis que nous supprimions l'indice 1 dans z_1, t_1, y_1, y_1', il viendra, pour l'intégrale générale de (A)

$$y = R(y_0, y_0')$$

R étant une fonction rationnelle des deux constantes d'intégration y_0 et y_0', fonction rationnelle dont les coëfficients dépendent de z. Les deux constantes d'intégration y_0 et y_0' ne sont d'ailleurs pas indépendantes, car elles sont liées entre elles par l'équation (A_0).

Si en particulier l'équation (A) est algébrique en z, les coëfficients de R dépendront algébriquement de z, et l'intégrale générale de l'équation (A) sera algébrique.

Si au contraire l'équation (A) s'écrit:

$$\sum A_{mp} y^m y'^p = 0$$

les coëfficients A_{mp} étant des fonctions non algébriques en z, l'intégrale générale

$$y = R$$

sera une fonction algébrique non seulement de y_0, mais des coëfficients A_{mp}.

Dans tous les cas, l'équation (A) s'intègre par des procédés purement algébriques.

On arrive d'ailleurs au même résultat par emploi des fonctions fuchsiennes. Ecrivons encore l'équation (A) sous la forme:

$$\sum A_{mp} y^m y'^p = 0.$$

Nous pourrons poser

$$y = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t)$$

φ et ψ étant deux fonctions fuchsiennes dont les coëfficients dépendent de z. Soient ξ et η deux fonctions fuchsiennes, indépendantes de z et à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. On aura:

$$y = R(\xi, \eta), \qquad y' = R_1(\xi, \eta)$$

R et R_1 étant des fonctions rationnelles de ξ et de η. Les coëfficients de ces fonctions rationnelles dépendent de z, et il est aisé de voir de quelle manière: ce sont des fonctions algébriques des coëfficients A_{mp}.

Conservons aux notations

$$z_0, \ z_1, \qquad y_0 = \varphi(t_0), \qquad y'_0 = \psi(t_0), \qquad y_1 = \varphi(t_1), \qquad y'_1 = \psi(t_1)$$

le même sens que plus haut. Le point analytique (y_1, y'_1) devra être lié au point analytique (y_0, y'_0) par une transformation birationnelle. On aura donc:

$$t_1 = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta}$$

la substitution

$$\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$$

appartenant au groupe appelé plus haut G'.

Les coëfficients α, β, γ, δ dépendent de z_0 et de z_1; mais ce ne peuvent être que des fonctions continues de z_1; de plus pour $z_1 = z_0$ on a $t_1 = t_0$. Mais le groupe G' est discontinu. Donc on a *quels que soient* z_1 *et* z_0:

$$\alpha = \delta = 1, \qquad \beta = \gamma = 0$$

$$t_1 = t_0.$$

Ainsi t *est une constante* et il en est par conséquent de même de ξ et de η qui ne dépendent que de t. L'intégrale générale de l'équation (A) est donc:

$$y = R(\xi, \eta)$$

où l'on doit regarder ξ et η comme deux constantes d'intégration liées entre elles par une relation algébrique.

C'est le même résultat que plus haut.

Il reste deux questions à résoudre.

On peut se demander en premier lieu s'il existe effectivement des équations intégrables algébriquement par le procédé que nous venons d'indiquer c'est à dire des équations algébriques de la forme (A), de genre $p > 1$ et satisfaisant aux conditions de M. Fuchs.

La reponse à cette première question doit être affirmative.

Soit en effet

$$F(\xi, \eta) = 0 \tag{9}$$

une relation algébrique quelconque de genre $p > 1$. Soit:

$$x = \varphi(\xi, \eta), \qquad y = \psi(\xi, \eta) \tag{10}$$

où φ et ψ sont des fonctions rationnelles de ξ et de η dont les coëfficients dépendent de z. Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'ils en dépendent algébriquement. L'élimination de ξ et de η entre les équations (9) et (10) donnera une relation:

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{11}$$

où Φ est un polynôme entier en x et y dont les coëfficients dépendent de z. Considérée comme une relation entre x et y seulement, la relation (11) définit une surface de Riemann de genre p, qui reste équivalente à elle-même quand on fait varier z.

Différentions les relations (10) par rapport à z (c'est à dire en y regardant ξ et η comme des constantes), il viendra:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{d\varphi}{dz}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{d\psi}{dz}.$$

$\frac{d\psi}{dz}$ est une fonction rationnelle de ξ et de η. Maintenant des relations (9) et (10) on peut déduire les suivantes:

$$(12) \qquad \xi = \varphi_1(x, y), \qquad \eta = \psi_1(x, y)$$

φ_1 et ψ_1 étant des fonctions rationnelles de x et de y dont les coëfficients dépendent de z. Il viendra donc

$$(13) \qquad \frac{dy}{dz} = R(x, y)$$

R étant une fonction rationnelle de x et de y dont les coëfficients dépendent de z. En éliminant x entre les équations (11) et (13) on arrivera à une éqnation de la forme (A), satisfaisant aux conditions de M. Fuchs.

On arriverait au même résultat en éliminant ξ et η entre les trois relations:

$$F(\xi, \eta) = 0, \qquad y = \psi(\xi, \eta), \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{d\psi}{dz}.$$

Soit par exemple:

$$(14) \qquad F(u, v, w) = 0$$

une équation dont le premier membre est un polynôme entier homogène du 4e degré en u, v, w.

Faisons y

$$(15) \qquad \begin{aligned} u &= a\,x + b\,y + c \\ v &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ w &= a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned}$$

où les a, les b et les c sont des fonctions algébriques de z. Nous écrirons l'équation:

$$F(ax + by + c, \; a_1 x + b_1 y + c_1, \; a_2 x + b_2 y + c_2) = 0.$$

Nous appellerons A, A_1, A_2, B, etc. les mineurs du déterminant:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Il viendra:

$$y = \frac{Bu + B_1 v + B_2 w}{Cu + C_1 v + C_2 w}$$

ou en différentiant par rapport à z et appelant B', B'_1, etc. les dérivées de B, B_1, etc. par rapport à z:

$$(16)\quad \frac{dy}{dz} = \frac{(B'u + B'_1 v + B'_2 w)(Cu + C_1 v + C_2 w) - (C'u + C'_1 v + C'_2 w)(Bu + B_1 v + B_2 w)}{(Cu + C_1 v + C_2 w)^2}.$$

L'élimination de u, v, w et x entre les équations (14), (15) et (16) donnera une équation différentielle de la forme (A) satisfaisant aux conditions de M. Fuchs.

Passons à la seconde question qu'il nous restait à résoudre:

Etant donnée une équation différentielle algébrique (A), de genre $p > 1$, satisfaisant aux conditions de M. Fuchs et que l'on sait par conséquent intégrable algébriquement, comment effectuer réellement cette intégration.

On a vu d'après ce qui précède que cette question se ramène à la suivante: Etant données deux surfaces de Riemann équivalentes, trouver la transformation birationnelle qui permet de passer de l'une à l'autre.

Le problème ainsi posé présente la plus grande analogie avec le problème de la réduction des formes arithmétiques. On conviendra de dire qu'une équation algébrique

$$F(x, y) = 0$$

est réduite lorsqu'on l'aura ramenée par une transformation birationnelle à une forme que l'on regardera comme plus simple que toutes les autres. Il faudrait choisir les conditions de réduction de façon:

1° que l'on puisse toujours trouver la transformation birationnelle qui réduit une surface de Riemann donnée;

2° qu'il n'y ait *en général* qu'une seule surface réduite équivalente à une surface de Riemann donnée et qu'il n'y en ait jamais qu'un nombre fini.

Alors on réduira les deux surfaces S_0 et S_1 que l'on veut transformer l'une dans l'autre; si les deux surfaces sont équivalentes, on devra parvenir à la même réduite et, comme on connaîtra la façon de transformer S_0 en la réduite et la réduite en S_1, on connaîtra aussi la transformation qui change S_0 en S_1.

Il est évidemment possible de trouver de pareilles conditions de réduction ce qui rendrait complète l'analogie avec la théorie des formes arithmétiques. Mais cela n'est pas nécessaire; on peut se contenter de conditions de réduction telles que la surface réduite ne dépende plus que d'un nombre fini de paramètres.

Par exemple, Clebsch démontre qu'une courbe de genre p

$$F(x, y) = 0$$

peut toujours être ramenée au degré $p + 1$ (*Abel'sche Functionen*, p. 65). Après cette réduction, elle dépend encore de $p - 1$ paramètres,

Soient donc

$$F(x, y) = 0, \qquad F'(x', y') = 0$$

deux courbes de genre p qu'il s'agit de ramener l'une à l'autre par une transformation birationnelle. Je ramènerai la première au degré $p + 1$ par une transformation convenablement choisie; elle deviendra

$$F_1(x_1, y_1) = 0. \tag{17}$$

Je pourrai trouver ensuite, par la méthode de Clebsch une infinité de transformations birationnelles dépendant de $p - 1$ paramètres arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$, qui ramèneront la seconde courbe au degré $p + 1$. Après l'application d'une de ces transformations, l'équation de cette courbe deviendra:

$$F_2(x_1, y_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) = 0 \tag{18}$$

où j'ai mis en évidence les paramètres α. Si les deux surfaces de Riemann sont équivalentes, on pourra disposer des α de façon à identifier

les équations (17) et (18) et on connaîtra du même coup la transformation qui fait passer d'une surface à l'autre.

On peut ainsi ramener la recherche des transformations birationnelles qui changent S_0 en S_1 à l'étude de l'équivalence des formes algébriques, c'est à dire de la transformation d'une telle forme en une autre par une substitution linéaire.

Soient:

$$F(x,\ y) = 0, \qquad F_1(x_1,\ y_1) = 0$$

deux équations qui représenteront deux surfaces de Riemann S_0 et S_1 et en même temps deux courbes algebriques C_0 et C_1. Soient m_0 et m_1 les degrés de ces deux courbes qui auront le même genre p. Soit:

$$(19) \qquad A_1\varphi_1(x,\ y) + A_2\varphi_2(x,\ y) + \dots + A_p\varphi_p(x,\ y) = 0$$

l'équation générale des courbes d'ordre $m_0 - 3$ qui passent par tous les points doubles de C_0. Soit de même:

$$(20) \qquad B_1\psi_1(x_1,\ y_1) + B_2\psi_2(x_1,\ y_1) + \dots + B_p\psi_p(x_1,\ y_1) = 0$$

l'équation générale des courbes d'ordre $m_1 - 3$ qui passent par tous les points doubles de C_1. Soient:

$$\theta(A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_p) = 0$$

$$\theta_1(B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_p) = 0$$

les deux relations algébriques et homogènes par rapport aux A et aux B qui expriment, la première que la courbe (19) est tangente à C_0, la seconde que la courbe (20) est tangente à C_1. Si d'autre part x et y sont les coordonnées du point de contact des deux courbes (19) et C_0, si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point de contact de (20) et de C_1, on aura:

$$x = R(A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_p), \qquad y = R'(A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_p)$$

$$x_1 = R_1(B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_p), \qquad y_1 = R_1'(B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_p),$$

les fonctions R, R', R_1 et R_1' étant rationnelles.

Si les deux surfaces de Riemann S_0 et S_1 ont mêmes modules, les deux formes algébriques θ et θ_1 seront algébriquement équivalentes,

c'est à dire qu'on pourra passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire, ou en posant:

$$A_i = \Sigma_k \alpha_{ik} B_k$$

les α_{ik} étant des coëfficients constants.

La transformation birationnelle qui change S_0 en S_1 sera alors facile à trouver. On aura en effet:

$$(21) \qquad \begin{aligned} x &= R(\Sigma\alpha_{1k}B_1,\ \Sigma\alpha_{2k}B_2,\ \ldots,\ \Sigma\alpha_{pk}B_p) \\ y &= R'(\Sigma\alpha_{1k}B_1,\ \Sigma\alpha_{2k}B_2,\ \ldots,\ \Sigma\alpha_{pk}B_p) \end{aligned}$$

avec les conditions:

$$(22) \qquad F_1(x_1, y_1) = 0, \qquad \Sigma B_i\psi_i(x_1, y_1) = 0, \qquad \Sigma B_i\theta_i(x_1, y_1) = 0$$

où l'on a posé:

$$\theta_i = \frac{d\psi_i}{dx_1}\frac{dF_1}{dy_1} - \frac{d\psi_i}{dy_1}\frac{dF_1}{dx_1}.$$

On pourra toujours trouver p fonctions rationnelles de x_1 et de y_1:

$$\rho_1(x_1, y_1),\ \rho_2(x_1, y_1),\ \ldots,\ \rho_p(x_1, y_1)$$

qui substituées à la place de $B_1, B_2, \ldots, B_p$ satisfont aux relations (22). On remplacera alors B_i par $\rho_i(x_1, y_1)$ dans les équations (21) et on obtiendra ainsi la transformation birationnelle qui change S_0 en S_1.

Les invariants qui restent arbitraires dans la forme algébrique θ sont au nombre de $3p - 3$ et ils doivent être regardés comme les modules de la surface de Riemann S_0.

Il est une circonstance sur laquelle je désirerais maintenant attirer l'attention et qui facilite singulièrement soit la recherche des conditions d'équivalence des deux formes θ et θ_1 et de la substitution linéaire qui les transforme l'une dans l'autre.

Parmi les courbes (19), il y en a $2^{p-1}(2^p - 1) = P$ qui sont $p - 1$ fois tangentes à C_0; nous les appelerons les courbes k_0; de même il y aura, parmi les courbes (20), P courbes k_1 qui seront $p - 1$ fois tangentes à C_1. La substitution linéaire:

$$A_i = \Sigma\alpha_{ik}B_k$$

qui change θ en θ_1 devra transformer les P courbes k_0 dans les P

courbes k_1. Il pourrait y avoir dans le problème général, une assez grande indétermination; car on pourrait se demander quelle est celle des P courbes k_0 qui se transformera dans une courbe k_1 donnée. Il y aurait $|\underline{P}$ combinaisons logiquement possibles, ce qui obligerait à faire un nombre très considérable d'essais inutiles.

D'autres considérations viendraient, il est vrai, réduire le nombre des combinaisons logiquement possibles; telle serait par exemple, pour $p = 3$, la distribution des 28 tangentes doubles en 64 systèmes de 4. Mais ce nombre n'en resterait pas moins très grand.

Fort heureusement, dans le problème particulier qui nous occupe, cette indétermination n'existe pas. Quelle est celle des courbes k_0 qui se transforme dans une courbe donnée k_1? La réponse est simple: c'est la courbe k_0 à laquelle se réduit la courbe donnée k_1 quand z_1 se réduit à z_0.

On arrive même ainsi, presque immédiatement, à déterminer un grand nombre d'intégrales particulières de l'équation (A).

En effet, soit l'équation

$$F(y, y', z) = 0 \tag{A}$$

pour $z = z_1$, elle représente une courbe C_1, qui est tangente en $P(p - 1)$ points aux courbes k_1. Considérons y, y' et z_1 comme les coordonnées d'un point dans l'espace: lorsqu'on fera varier z_1, les $P(p - 1)$ points de contact (y, y') de C_1 avec les P courbes k_1, décriront dans l'espace $P(p - 1)$ courbes qui seront des intégrales particulières de l'équation (A).

Il n'y a donc aucune difficulté à craindre dans les calculs algébriques qui conduisent à l'intégration de l'équation (A).

Remarquons en passant que la considération des P courbes k_0 nous conduit à une seconde démonstration de ce théorème qu'une surface de Riemann ne peut jamais être transformée en elle-même par une infinité de transformations birationnelles.

J'arrive à la conclusion définitive de ce travail. Les équations du 1[er] ordre qui satisfont aux conditions de M. Fuchs ne constituent pas des classes réellement nouvelles d'équations différentielles.

Dans le cas de $p = 0$, elles se ramènent aux équations linéaires.

Dans le cas de $p = 1$, elles s'intègrent par une simple quadrature.

Enfin dans le cas de $p > 1$, elles s'intègrent par des procédés purement algébriques.

Nous devons donc renoncer à l'espoir de rencontrer parmi elles des classes essentiellement nouvelles d'équations intégrables par les transcendantes fuchsiennes. Tout au plus pourrions-nous supposer qu'il en existe de pareilles, parmi les équations d'ordre supérieur; mais on ne pourra s'en assurer que par une discussion spéciale, analogue à celle qui précède.

Le beau résultat de M. Fuchs en perd-il pour cela son intérêt? Je ne le crois pas. Il nous fournit en effet une classe très-nombreuse d'équations différentielles intégrables algébriquement. Les conditions de M. Fuchs sont très simples et il suffit d'un examen assez rapide pour reconnaître si elles sont remplies. On reconnaît du même coup l'intégrabilité algébrique, qui sans cette circonstance aurait pu passer inaperçue.

De plus, on peut fonder sur ce théorème une méthode pour trouver les modules d'une surface de Riemann; mais c'est là un point que je ne puis développer en ce moment.

Paris, 25 Novembre 1884.

SUR UN THÉORÈME CONCERNANT LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

EDVARD PHRAGMEN

à STOCKHOLM.

Dans son enseignement à l'université de Berlin, M. WEIERSTRASS a donné une théorie des fonctions elliptiques aussi remarquable par la beauté que par la simplicité des méthodes, où il prend pour point de départ le théorème suivant:

Toute fonction analytique $\varphi(u)$ possédant un théorème d'addition ou, en d'autres termes, telle qu'il existe une relation algébrique entre les valeurs de la fonction correspondant aux valeurs de l'argument u, v, $u + v$, est

1° ou une fonction algébrique de u; ou bien

2° si ω désigne une constante convenablement choisie, une fonction algébrique de la fonction $e^{\frac{\pi i u}{\omega}}$; ou enfin

3° si ω, ω' sont deux constantes convenablement choisies, une fonction algébrique de la fonction [1]

$$\wp(u \mid \omega, \omega') = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - 2\mu\omega - 2\mu'\omega')^2} - \frac{1}{(2\mu\omega + 2\mu'\omega')^2}\right]$$

($\mu, \mu' = 0, 1, 2, \ldots$ sauf la combinaison $\mu = \mu' = 0$).

Cette théorie n'a jamais été, en son entier, l'objet d'aucune publication de la part de son auteur; le seul ouvrage à ma connaissance qui

[1] Pour la théorie de cette fonction, voir l'ouvrage de M. SCHWARZ: *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* (1881—1884).

puisse en donner une idée nette est celui de M. Schwarz; mais comme la démonstration que M. Weierstrass a donnée du théorème énoncé plus haut ne s'y trouve pas, j'ai été réduit à mes propres ressources pour en chercher une; ce n'est que plus tard que la démonstration de M. Weierstrass m'a été communiquée par mes professeurs, M. Mittag-Leffler et Mme Kowalevski. Un caractère essentiel de cette démonstration c'est qu'elle peut être généralisée de manière à embrasser le cas général des fonctions abéliennes. Mais si l'on renonce à cette généralisation et que l'on se borne à démontrer le théorème ci-dessus énoncé, la démonstration que j'ai trouvée paraît un peu plus simple et plus facile que celle de M. Weierstrass et j'ai l'honneur de la présenter aux lecteurs des Acta, dans l'espoir qu'elle leur offrira quelque intérêt.

Nous posions que la fonction analytique $\varphi(u)$ avait un théorème d'addition algébrique ou qu'il existait, entre $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ et $\varphi(u+v)$, une relation algébrique. Je me bornerai à supposer qu'il y a trois éléments [1]

$$\mathfrak{P}_1(u\,|\,a), \qquad \mathfrak{P}_2(v\,|\,b), \qquad \mathfrak{P}(u+v\,|\,a+b)$$

de la fonction φ liés par une équation algébrique

$$(1) \qquad G[\mathfrak{P}_1(u\,|\,a),\ \mathfrak{P}_2(v\,|\,b),\ \mathfrak{P}(u+v\,|\,a+b)] = 0.$$

On sait alors que la même équation a lieu pour tout système de trois éléments qu'on peut obtenir en continuant le système des éléments $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}$ le long d'un chemin quelconque. Mais de là on ne peut pas conclure immédiatement que l'on ait

$$G[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u+v)] = 0$$

pour trois valeurs quelconques de la fonction correspondant aux valeurs de l'argument u, v, $u+v$. En effet, si l'on change l'élément $\mathfrak{P}_1(u\,|\,a)$ en $\mathfrak{P}_1'(u\,|\,a)$ en le continuant le long d'un chemin fermé et qu'on laisse inaltéré l'élément $\mathfrak{P}_2(v\,|\,b)$, $\mathfrak{P}(u+v\,|\,a+b)$ se changera en général en un

---

[1] $\mathfrak{P}(u\,|\,a)$ = une série procédant suivant les puissances entières et positives de $(u-a)$.

nouvel élément $\mathfrak{S}'(u+v \mid a+b)$, de sorte que l'on ne voit pas si l'élément nouveau $\mathfrak{S}'_1(u \mid a)$ satisfait à la relation

$$G[\mathfrak{S}'_1(u \mid a),\ \mathfrak{S}_2(v \mid b),\ \mathfrak{S}(u+v \mid a+b)] = 0$$

ou non.

Dans ce qui suit, je démontrerai en premier lieu que si l'on admet la relation (1), la fonction $\varphi(u)$ a le caractère d'une fonction algébrique à l'intérieur de tout domaine fini.

En disant qu'une fonction définie par un élément donné a le caractère d'une fonction algébrique à l'intérieur d'un domaine donné, j'entends que toutes les valeurs qu'on peut obtenir en continuant l'élément le long de chemins appartenant tout entiers au domaine donné satisfont à une équation de la forme

$$z^n + f_1 z^{n-1} + f_2 z^{n-2} + \ldots + f_n = 0,$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ont le caractère d'une fonction rationnelle à l'intérieur du même domaine.

Puis je montrerai que l'on a en effet

$$G[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u+v)] = 0,$$

où $\varphi(u)$ désigne une valeur quelconque de la fonction φ correspondant à l'argument u et ainsi de suite pour $\varphi(v)$ et $\varphi(u+v)$.

Dès lors, je sais que $\varphi(u)$ ne peut avoir en chaque point qu'un nombre fini de valeurs, et, m'appuyant sur ce fait, je démontre aisément que $\varphi(u)$ est ou une fonction algébrique ou une fonction périodique, et il n'y a plus de difficulté à achever la démonstration.

Supposons donc que la relation

$$G[\mathfrak{S}_1(u \mid a),\ \mathfrak{S}_2(v \mid b),\ \mathfrak{S}(u+v \mid a+b)] = 0$$

ait lieu entre trois éléments $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}$ de la fonction φ.

Si nous considérons un de ces éléments, par exemple $\mathfrak{S}_1(u \mid a)$, nous voyons qu'on peut trouver une quantité positive r_1 telle, que pour le domaine

$$|u - a| < r_1$$

la fonction définie par cet élément ait le caractère d'une fonction algébrique. C'est ce qui du moins a lieu si l'on choisit r_1 plus petit que le

rayon de convergence de la série $\mathfrak{P}_1(u \mid a)$. Pour les autres éléments $\mathfrak{P}_2(v \mid b)$, $\mathfrak{P}(u + v \mid a + b)$, l'analogue a lieu.

De plus, on voit que les limites supérieures des quantités r_1, r_2, r sont finies ou infinies en même temps. Car si l'une de ces limites supérieures est infinie, c'est que $\varphi(u)$ a le caractère d'une fonction algébrique pour tout domaine fini, et alors il faut que les autres soient aussi infinies. Or, on voit aisément qu'elles ne peuvent être finies toutes les trois. Car, si c'était le cas, admettons que ρ_1, ρ_2, ρ soient leurs valeurs: il faut qu'on ait l'une des deux inégalités suivantes

$$\rho_1 < \rho + \rho_2 \quad \text{ou} \quad \rho_2 < \rho + \rho_1.$$

Soit $\rho_1 < \rho + \rho_2$. Si l'on pose alors

$$v - b = -\frac{\rho_2}{\rho + \rho_2}(u - a)$$

et par conséquent

$$u + v - a - b = \frac{\rho}{\rho + \rho_2}(u - a),$$

et que l'on suppose

$$|u - a| < R < \rho + \rho_2,$$

on a

$$|v - b| < \frac{R}{\rho + \rho_2} \cdot \rho_2 < \rho_2,$$

$$|u + v - a - b| < \frac{R}{\rho + \rho_2} \cdot \rho < \rho,$$

et, par conséquent, les fonctions de u définies après cette substitution par les éléments $\mathfrak{P}_2$ et $\mathfrak{P}$ ont le caractère d'une fonction algébrique pour tout domaine

$$|u - a| < R,$$

où R est une quantité positive plus petite que $\rho + \rho_2$. Si l'on désigne ces fonctions par y, z et la fonction définie par l'élément $\mathfrak{P}_1(u \mid a)$ par x, on a la relation

$$G(x, y, z) = 0.$$

Si entre cette équation et les équations

$$y^\mu + \varphi_1 y^{\mu-1} + \ldots + \varphi_\mu = 0,$$

$$z^\nu + \psi_1 z^{\nu-1} + \ldots + \psi_\nu = 0,$$

qui définissent y et z comme des fonctions à caractère algébrique à l'intérieur du domaine $|u - a| < R$, on élimine y et z, on obtient une équation

$$x^n + f_1 x^{n-1} + \ldots + f_n = 0,$$

où $f_1, \ldots, f_n$ ont le caractère d'une fonction rationnelle dans le domaine $|u - a| < R$.

Donc x a le caractère d'une fonction algébrique à l'intérieur de ce même domaine $|u - a| < R$, où R est une quantité positive quelconque plus petite que $\rho + \rho_2$, ce qui est contraire à la supposition $\rho_1 < \rho + \rho_2$.

On voit que le même raisonnement s'applique au cas où $\rho_2 < \rho + \rho_1$.

Donc la fonction $\varphi(u)$ a le caractère d'une fonction algébrique dans tout domaine fini.

Prouvons maintenant que l'on a toujours entre trois valeurs de la fonction φ correspondant aux valeurs de l'argument $u, v, u + v$ la relation

$$G[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u + v)] = 0.$$

Nous le démontrerons en faisant voir que chaque valeur φ_a, que la fonction $\varphi(u)$ peut prendre dans le point a, ou dont $\varphi(u)$ s'approche indéfiniment lorsque u s'approche indéfiniment de a sur un certain chemin, satisfait à l'équation

$$G[\varphi_a,\ \mathfrak{P}_2(v \mid b),\ \mathfrak{P}(a + v \mid a + b)] = 0.$$

En effet, on arrive à la valeur φ_a en continuant l'élément $\mathfrak{P}_1(u \mid a)$ le long d'un certain chemin fermé. On peut toujours choisir un domaine continu, fini et simplement connexe qui contienne ce chemin tout entier. On peut encore déterminer un second domaine continu et fini tel, que la limite inférieure des distances d'un point à l'intérieur du premier domaine et d'un point à l'extérieur du second soit plus grande qu'une quantité $d > |b|$.

Imaginons-nous pour un instant un troisième domaine assez grand pour contenir à son intérieur non seulement le dernier des deux domaines que nous venons de fixer, y compris la limite, mais aussi le chemin le long duquel il faut continuer l'élément $\mathfrak{S}_1(u \mid a)$ pour arriver à l'élément $\mathfrak{S}(u+v \mid a+b)$. A l'intérieur de ce domaine, la fonction définie par l'élément $\mathfrak{S}_1(u \mid a)$ — ou, ce qui donne la même fonction, par $\mathfrak{S}(u+v \mid a+b)$ — a le caractère d'une fonction algébrique, et par conséquent elle ne peut avoir qu'un nombre fini de points singuliers à l'intérieur du plus grand de nos deux premiers domaines. Nous pouvons donc choisir deux points a', b' dans l'entourage de a et de b, de manière à satisfaire aux conditions suivantes. En premier lieu, il faut que l'on ait $|b'| < d$, de sorte qu'à chaque point α à l'intérieur du plus petit de nos deux domaines corresponde un point $\alpha + b'$ à l'intérieur du plus grand. De plus, le point a' doit être choisi à l'intérieur du petit domaine et d'une telle manière, que les points a', $a' + b'$ ne se confondent avec aucun des points en nombre fini du grand domaine qui constituent des points singuliers pour la fonction considérée tout à l'heure. Enfin, si α est un point singulier de cette fonction situé à l'intérieur du petit domaine, $\alpha + b'$ doit être un point régulier de la même fonction.

Sans changer la valeur finale φ_a, nous pouvons maintenant remplacer le chemin fermé $a \ldots a$ par la suite des chemins réguliers suivants: 1° un chemin aa', 2° un nombre de *lacets*[1] joignant le point a' à des points singuliers situés à l'intérieur du moindre domaine, et 3° le chemin $a'a$. On peut même choisir ces lacets de manière que les lacets correspondants que décrit le point $u + b'$ soient composés de chemins réguliers et de cercles qui ne contiennent aucun point singulier. Donc, si l'on continue le système des éléments $\mathfrak{S}_1(u \mid a)$, $\mathfrak{S}_2(v \mid b)$, $\mathfrak{S}(u+v \mid a+b)$ en faisant varier 1° u de a à a' et v de b à b', 2° u de a' à a' le long des lacets, et 3° u de a' à a et v de b' à b, en partant de l'élément $\mathfrak{S}_1(u \mid a)$ on s'approche indéfiniment de la valeur φ_a, tandis que les éléments $\mathfrak{S}_2(v \mid b)$ et $\mathfrak{S}(u+v \mid a+b)$ reviennent.

---

[1] Par un *lacet* joignant le point a' à un point singulier α, nous entendons un chemin régulier composé d'un chemin partant de a' et aboutissant dans l'entourage de α, d'un petit cercle autour de α et du premier chemin parcouru en sens contraire (Voir par ex. BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*).

Mais il est démontré dès lors que chaque élément régulier ou singulier $\varphi(u \mid a)$ de la fonction $\varphi(u)$ dans l'entourage du point a satisfait nécessairement à l'équation

$$G[\varphi(u \mid a),\ \mathfrak{F}_2(v \mid b),\ \mathfrak{F}(u+v \mid a+b)] = 0.$$

Comme l'analogue a lieu pour les éléments $\mathfrak{F}_2$ et $\mathfrak{F}$ et que d'ailleurs les points a, b sont tout à fait arbitraires, notre assertion se trouve entièrement justifiée.

De ce que la relation

$$G[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u+v)] = 0$$

a toujours lieu, il s'ensuit que la fonction $\varphi(u)$ ne peut avoir en chaque point qu'un nombre fini de valeurs

$$\varphi_1(u),\ \varphi_2(u),\ \ldots,\ \varphi_n(u).$$

Donc, si l'on forme les expressions

$$\frac{1}{\varphi_1 u - a} + \ldots + \frac{1}{\varphi_n u - a},$$

$$\frac{1}{(\varphi_1 u - a)^2} + \ldots + \frac{1}{(\varphi_n u - a)^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(\varphi_1 u - a)^n} + \ldots + \frac{1}{(\varphi_n u - a)^n},$$

on voit immédiatement qu'elles représentent des fonctions qui ont le caractère d'une fonction rationnelle à l'intérieur de tout domaine fini. Si elles sont toutes des fonctions rationnelles, $\varphi(u)$ est une fonction algébrique. Dans le cas contraire, supposons que pour la fonction

$$\frac{1}{(\varphi_1 u - a)^m} + \ldots + \frac{1}{(\varphi_n u - a)^m}$$

le point $u = \infty$ est un point singulier essentiel. On sait alors que, pour des valeurs de l'argument plus grandes en valeur absolue qu'une quantité donnée quelconque, cette fonction peut prendre des valeurs plus grandes en valeur absolue qu'une autre quantité donnée quelconque, et, par conséquent, pour des valeurs de u plus grandes en valeur absolue qu'une quantité arbitrairement donnée, $\varphi(u)$ peut prendre des valeurs telles, que la valeur absolue de $[\varphi(u) - a]$ soit plus petite que toute quantité donnée. Mais cela étant, on démontre à l'aide d'un raisonnement employé par M. Weierstrass dans son cours et que je reproduis ici succinctement, que $\varphi(u)$ est nécessairement périodique.

En effet, on voit en premier lieu que, dans le voisinage d'un point donné quelconque, il y a toujours une valeur que $\varphi(u)$ reprend au moins un nombre donné de fois. Car supposons que dans le voisinage d'un point a il y ait une valeur b que $\varphi(u)$ reprend un nombre m de fois aux points $u_1, \ldots, u_m$. Alors $\varphi(u)$ peut prendre chaque valeur dans un certain entourage de b pour des valeurs de l'argument dans le voisinage des points $u_1, \ldots, u_m$. Mais $\varphi(u)$ pouvant prendre une valeur aussi peu différente de b qu'on le désire dans un point du voisinage de $u = \infty$, on voit qu'on peut trouver dans chaque entourage de b une valeur que $\varphi(u)$ reprend $(m + 1)$ fois au moins. Dans l'entourage de chaque valeur a, on peut donc trouver une autre valeur b que $\varphi(u)$ reprend au moins un nombre donné de fois.

Donc, si l'équation

$$G[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u + v)] = 0$$

est du degré m par rapport à $\varphi(u + v)$ et que l'on choisisse $(m + 1)$ points $v_1, \ldots, v_{m+1}$, dans lesquels $\varphi(v)$ reprend la même valeur a, l'équation en z

$$G[\varphi(u),\ a,\ z] = 0$$

aura pour racines

$$\varphi_1(u + v_1),\ \ldots,\ \varphi_1(u + v_{m+1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(u + v_1),\ \ldots,\ \varphi_n(u + v_{m+1}).$$

Par conséquent, le nombre des racines différentes ne pouvant dépasser m, on aura pour chaque valeur donnée de u une égalité de la forme

$$\varphi_\alpha(u + v_\gamma) = \varphi_\beta(u + v_\delta) \qquad (\gamma \gtreqless \delta)$$

ce qui, le nombre de ces combinaisons étant fini, ne peut être que si une au moins de ces égalités est une identité. Mais d'une identité

$$\varphi_\alpha(u + 2\omega) = \varphi_\beta(u),$$

c'est-à-dire de l'identité d'un des éléments de $\varphi(2\omega + u)$ à un point quelconque avec l'un des éléments de $\varphi(u)$ au même point, on conclut que les fonctions de u $\varphi(2\omega + u)$ et $\varphi(u)$ sont identiques, c'est-à-dire que $\varphi(u)$ a la période 2ω.

Soit maintenant 2ω une période de $\varphi(u)$ telle, qu'il n'y ait pas de période de la forme $2\mu\omega$, $\mu =$ une quantité réelle plus petite que l'unité. Cette période existe. Soit de plus $z = e^{\frac{\pi i u}{\omega}}$. Les fonctions symétriques élémentaires de $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ sont des fonctions analytiques uniformes de z, qui n'ont que deux points singuliers essentiels au plus, $z = 0$ et $z = \infty$, et l'on voit, comme ci-dessus, que si la fonction $\varphi(u)$ n'est pas algébrique en z, elle reprend la même valeur pour $(m + 1)$ valeurs de z et par conséquent pour $(m + 1)$ valeurs de u non-équivalentes par rapport à la période 2ω. De là on conclut que $\varphi(u)$ a des périodes dont le rapport à 2ω n'est pas une quantité réelle.

Choisissons maintenant deux périodes quelconques 2ω, $2\omega'$ dont le rapport n'est pas une quantité réelle, et formons la fonction $\wp(u \mid \omega, \omega')$ appartenant à ces périodes: en posant $z = \wp(u \mid \omega, \omega')$, on voit aisément que $\varphi(u)$ est une fonction algébrique de z. Car de la définition de $\wp(u \mid \omega, \omega')$ il s'ensuit immédiatement que cette fonction est une fonction doublement périodique, aux périodes élémentaires 2ω, $2\omega'$, et qui n'a pas, à distance finie, de singularité essentielle. Par conséquent, comme $\wp(u)$ a un infini double dans le parallélogramme des périodes, on conclut que, dans chaque parallélogramme élémentaire, il y a deux points, distincts ou coïncidants, où cette fonction acquiert une valeur donnée quelconque. Et, lorsque z est situé dans l'entourage d'un point z_0 quelconque, fini ou infini, chacune des deux valeurs correspondantes de u non-équivalentes

par rapport aux périodes a le caractère d'une fonction algébrique de z. Donc $\varphi(u)$ considéré comme fonction de z a aussi le caractère d'une fonction algébrique dans l'entourage de tout point z_0 (fini ou infini), et de plus cette fonction ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs pour chaque valeur de z.

Mais de là on peut conclure que $\varphi(u)$ est une fonction algébrique de z.

ÜBER DIE BEGRENZUNGEN VON CONTINUA

VON

EDVARD PHRAGMÉN
in STOCKHOLM.

Wenn man von der WEIERSTRASS'schen Auffassung des Begriffes einer analytischen Function ausgeht, so ist, wie bekannt, immer die Gesammtheit der regulären und der ausserwesentlich singulären Stellen einer eindeutigen analytischen Function ein *Continuum*.[1]

Dies Continuum kann aber grössere oder kleinere Theile der Ebene umschliessen. Einer Angabe von Hrn. SCHWARZ zufolge, wurde das erste Beispiel einer analytischen Function, von deren Existenz-Bereich continuirliche Stücke der Ebene ausgeschlossen waren, von Hrn. WEIERSTRASS im Jahre 1863 gegeben. Heut zu tage ist nichts leichter als solche Beispiele zu bilden. Die Modulfunctionen sind ein solches; mit Hülfe der Darstellungssätze von Hrn. Prof. MITTAG-LEFFLER kann man sich deren beliebig viele bilden, und die Untersuchungen von Hrn. POINCARÉ über die linearen Differentialgleichungen führen mit Nothwendigkeit auf solche Functionen.

Wenn man nun, vermöge der Darstellungssätze des Hrn. Prof. MITTAG-LEFFLER oder in anderer Weise, sich einen analytischen Ausdruck gebildet hat, der in allen Punkten der Ebene sich regulär verhält — mit Aus-

---

[1] Unter *Continuum* verstehe ich im Folgenden eine Punktmenge wie sie Hr. WEIERSTRASS, *Zur Functionenlehre*, S. 5, betrachtet und eine aus *einem* Stück bestehende Fläche nennt.

nahme derjenigen welche zu einer gewissen Punktmenge[1] P gehören, von der kein Theil ein Continuum ist, — so kann dieser Ausdruck, der verschiedenen Beschaffenheit der Punktmenge P zufolge, mehrere verschiedene analytische Functionen — welche dann sämmtlich der oben angedeuteten Art sind — oder eine einzige Function darstellen, je nachdem die Ebene durch das Ausschliessen der Punktmenge P in mehrere getrennte Continua zerfällt oder nicht.

Von Hrn. Prof. MITTAG-LEFFLER aufgefordert, habe ich in Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1884, n° 1, Seite 121, bewiesen, dass:

wenn kein Theil einer abgeschlossenen Punktmenge P zusammenhängend[2] *ist, so bildet die Gesammtheit derjenigen Punkte der Ebene, welche nicht zu P gehören, ein einziges Continuum.*

Da Prof. MITTAG-LEFFLER gewünscht hat, dass ich diesen Satz in den Acta Mathematica reproducire, will ich jetzt einen einfacheren, mehr direkten Beweis desselben geben oder vielmehr einen anderen, etwas umfassenderen Satz beweisen.

Da die Punkte, welche übrig bleiben, nachdem man eine gewisse *abgeschlossene* Punktmenge ausgeschlossen hat, nothwendiger Weise ein oder mehrere Continua bilden, so kann der obige Satz auch in dieser Form ausgesprochen werden:

Ist die Punktmenge P die vollständige Begrenzung eines Continuums A und existiren in der Ebene Punkte die ausserhalb A liegen, so muss irgend ein Theil von P zusammenhängend sein.

Für den Beweis dieses Satzes kann ich offenbar annehmen, dass der Punkt ∞ *ausserhalb* A liegt, d. h. dass A ganz und gar im Endlichen liegt, denn auf diesen Fall kann man ja immer den entgegengesetzten

---

[1] Ich will hier schon darauf aufmerksam machen, dass eine solche Punktmenge P immer *abgeschlossen* ist, um den Ausdruck des Hrn. CANTOR (Mathematische Annalen, B. 23, S. 470) zu gebrauchen, d. h. dass die Punkte der ersten abgeleiteten Menge alle zu P gehören.

[2] Nach CANTOR, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* Mathematische Annalen, B. 21, S. 575 (französische Übersetzung in Acta Mathematica, B. 2, S. 406), heisst ein System von Punkten *zusammenhängend,* wenn man für zwei willkürlich gegebene Punkte t und t' des Systems und eine gegebene, beliebig kleine Zahl ε, stets eine endliche Anzahl von Punkten des Systems finden kann, der Art dass die Entfernungen $\overline{tt_1}$, $\overline{t_1t_2}$, $\overline{t_2t_3}$, ... $\overline{t_\nu t'}$ sämmtlich kleiner als ε sind.

durch eine oder, wenn man so will, mehrere Transformationen durch reciproke Radii Vectores zurückführen.

Da also angenommen wird, dass das Continuum A ganz und gar im Endlichen gelegen ist, so kann man ein Quadrat finden, welches A vollkommen einschliesst. Dieses Quadrat theile ich in m_1^2 gleiche Quadrate, jedes dieser Quadrate wieder in m_2^2 gleiche u. s. f., wo m_1, m_2, ... ganze Zahlen bezeichnen.

Für jede neue Eintheilung bilde ich mir aus allen denjenigen Quadraten, welche, im Innern oder auf der Grenze, einen zu P gehörigen Punkt enthalten, eine Punktmenge, welche für die ν^{te} Eintheilung Q_ν heissen möge. Hiervon ist es eine unmittelbare Folge, dass $Q_{\nu+1}$ ein Theil von Q_ν ist.

Betrachten wir nun eine solche Punktmenge Q_ν, so sehen wir leicht ein, dass wenn sie aus mehreren getrennten continuirlichen Stücken besteht, es nothwendig ist, dass eins derselben die übrigen in der Form eines Ringes umschliesst. Denn die entgegengesetzte Annahme würde mit der Voraussetzung im Widerspruch stehen, dass A ein im Endlichen gelegenes Continuum sei. Es muss dies auch dann noch gelten, wenn man zwei Quadrate, welche nur in einem Eckpunkte zusammenstossen, als gar nicht zusammenhängend betrachtet. Dieser Eckpunkt kann nämlich dann nicht zu P gehören, weil in dem Falle die zwei anderen Quadrate, welche in diesem Punkte einen Eckpunkt haben, zu Q_ν gehören müssten; wenn man also von Q_ν diejenigen Punkte ausschliesst, welche zu einer gewissen kleinen Umgebung dieses Punktes gehören, so gelten die obigen Schlüsse.

Dieses, die anderen Stücke ringförmig umschliessende Stück, oder wenn nur ein Stück vorhanden ist, Q_ν selbst, bezeichnen wir mit R_ν.

Dann muss, wie leicht einzusehen ist, $R_{\nu+1}$ ein Theil von R_ν sein. Denn $R_{\nu+1}$ ist ein Theil von Q_ν; wenn es also nicht ein Theil von R_ν wäre, so müsste es ein Theil von einem der anderen Continua sein, welche zusammen Q_ν ausmachen, und demnach von R_ν ringförmig umschlossen sein, was nicht möglich ist, da R_ν Punkte aus der Begrenzung von A enthält, also Punkte, welche zu $Q_{\nu+1}$ gehören. Es ist demnach $R_{\nu+1}$ immer ein Theil von R_ν.

Geht man mit diesen Eintheilungen in kleinere und immer kleinere Quadrate genügend weit, so muss man zu einer solchen Eintheilung ge-

langen, bei welcher irgend ein Quadrat ganz und gar innerhalb A fällt. Bei dieser Eintheilung und bei all den folgenden muss also R_ν dieses Quadrat ringförmig umschliessen. Dies folgt unmittelbar aus der Annahme dass A ganz und gar im Endlichen liegt.

Jetzt wollen wir diejenige Punktmenge, R, betrachten, welche aus sämmtlichen den Punktmengen

$$R_1, R_2, \ldots, R_\nu, \ldots$$

gemeinschaftlichen Punkten besteht.

Diese Punktmenge ist ein Theil der Begrenzung von A, denn in jeder Umgebung eines zu ihr gehörigen Punktes finden sich Punkte, welche auf der Grenze von A liegen. Sie ist ferner zusammenhängend. Dies sieht man durch die folgende Betrachtung ohne Schwierigkeit ein. Die Gesammtheit der Quadrate von R_ν, welche mit R einen Punkt gemein haben, möge mit R'_ν bezeichnet werden. Man betrachte nun eins der Quadrate von R_ν. Wenn dieses Quadrat nicht zu R'_ν gehört, so kann man offenbar den Index μ so gross annehmen, dass es auch mit R_μ keinen Punkt gemein hat. Da aber die Anzahl der Quadrate in R_ν endlich ist, kann man μ so gross wählen, dass keines der Quadrate von R_ν, welche nicht zu R'_ν gehören, mit R_μ einen gemeinschaftlichen Punkt haben. R'_ν oder die Gesammtheit der Quadrate der ν^{ten} Eintheilung der Ebene welche mit R einen Punkt gemein haben, ist also mit der Gesammtheit derjenigen Quadrate von R_ν identisch, welche mit R_μ gemeinschaftliche Punkte besitzen. Und da R_μ für hinreichend grosse Werthe des Index die Gestalt eines Ringes hat, welcher ein gewisses, endliches Quadrat völlig umschliesst, so muss dasselbe offenbar von R'_ν gelten. Daraus kann man aber unmittelbar schliessen, dass R eine nach der Definition des Hrn. Cantor zusammenhängende Punktmenge ist.

Man hat indess die charakteristischen Eigenschaften der Punktmenge R keineswegs erschöpft, wenn man sagt, sie sei zusammenhängend. In der That hat man viel mehr ausgesprochen, wenn man sagt, die Punktmenge R besitze für eine gewisse Art, die Ebene in kleinere und kleinere Quadrate einzutheilen, die Eigenschaft, dass die den Punktmengen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, \ldots$ entsprechenden Punktmengen $R'_1, R'_2, \ldots, R'_\nu, \ldots$ Continua sind, die für hinreichend grosse Werthe des Index ν ein gewisses endliches Quadrat ringförmig umschliessen, oder, was nach dem früher

Entwickelten dasselbe sein muss,[1] deren Begrenzungen aus wenigstens zwei geschlossenen, gebrochenen Linien gebildet sind, welche ein gewisses Quadrat von endlicher Grösse umschliessen.

Erstens nämlich ist es leicht zu zeigen, dass eine abgeschlossene Punktmenge R, welche für eine Art der Eintheilung diese Eigenschaft besitzt, sie auch für jede andere Art die Ebene in Quadrate zu zerlegen behalten muss. Es seien nämlich

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, \ldots,$$

$$Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_\nu, \ldots,$$

die, zwei besonderen Eintheilungen entsprechenden Punktmengen, welche aus allen denjenigen Quadraten bestehen, die mit R einen Punkt gemein haben. Dann kann man μ so gross wählen, dass Q'_ν alle diejenigen Quadrate aus der ν^{ten} Eintheilung der zweiten Art enthält, welche mit Q_μ gemeinschaftliche Punkte besitzen. Daraus sieht man leicht, dass wenn R die fragliche Eigenschaft für die erste Art der Eintheilung besitzt, dieselbe auch für die zweite Art bestehen muss.

Zweitens aber kann man, wie leicht zu übersehen ist, den bewiesenen Satz in der folgenden Weise umkehren.

Wenn man aus der Ebene eine im Endlichen gelegene, abgeschlossene Punktmenge P ausschliesst, welche die folgende Eigenschaft hat: für eine gewisse Art die Ebene in kleinere und kleinere Quadrate zu zerlegen, sind die Punktmengen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, \ldots,$ welche aus denjenigen Quadraten bestehen, die mit P gemeinschaftliche Punkte haben, sämmtlich Continua, welche, sobald ν einen gewissen Werth übersteigt, von wenigstens zwei geschlossenen, gebrochenen Linien, die ein gegebenes, endliches Quadrat umschliessen, begrenzt sind, so bilden die übrigen Punkte der Ebene mehrere getrennte Continua, von denen eins im Endlichen gelegen ist.

Die oben angegebene Methode lässt sich unmittelbar anwenden, um die entsprechenden Sätze in einem Raum von n Dimensionen zu beweisen.

Der Kürze halber wollen wir folgende Benennungen einführen.

Unter dem Ausdrucke *ein gebrochener* $(n-1)$*-dimensionaler Raum* in einem ebenen Raume von n oder mehr Dimensionen verstehen wir die

---

[1] Da zwei Quadrate, welche nur in einem Eckpunkt zusammentreffen, als gar nicht zusammenstossend betrachtet werden können.

Gesammtheit einer endlichen Anzahl *ebener* (n — 1)-dimensionaler Räume, die durch *gebrochene* (n — 2)-dimensionale Räume begrenzt sind.

Einen solchen Raum nennen wir *geschlossen*, wenn jeder der ebenen (n — 1)-dimensionalen Räume, aus denen er gebildet ist, jeden der begrenzenden (n — 2)-dimensionalen ebenen Räume mit einem anderen der (n — 1)-dimensionalen Räume gemein hat.

Dies vorausgeschickt, können wir den folgenden Satz aussprechen:

Wenn in einem Raume von n Dimensionen A ein im Endlichen gelegenes Continuum ist, so kann man aus der Begrenzung desselben einen Theil P ausscheiden, welcher nicht nur zusammenhängend ist, sondern vielmehr die folgende Eigenschaft besitzt:

Wenn man einen »Würfel von n Dimensionen», der hinreichend gross ist, um das Continuum A vollständig zu enthalten, in m_1^n gleiche »Würfel» eintheilt, jeden dieser »Würfel» wieder in m_2^n gleiche u. s. f. und für jede Eintheilung eine Punktmenge (Q_1, Q_2, ...) aus allen denjenigen »Würfeln» bildet, welche mit P einen Punkt gemein haben, so ist jede solche Punktmenge ein Continuum von n Dimensionen, und, wenn man eine gewisse endliche Anzahl ausnimmt, wird jede der übrigen von wenigstens zwei *geschlossenen*, gebrochenen (n — 1)-dimensionalen Räumen begrenzt, welche einen gewissen »Würfel» endlicher Grösse umschliessen.

Auch dieser Satz lässt eine Umkehrung zu.

ÜBER SYSTEME VON PLANCURVEN

VON

H. KREY

in FREIBURG i/B.

Die vor nunmehr elf Jahren erschienene Abhandlung des Herrn ZEUTHEN: »*Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver*[1]» enthält die Grundlagen für eine Behandlung der auf algebraische ebene Curven bezüglichen anzahlgeometrischen Fragen. Es handelt sich bei Aufgaben dieser Art um die Bestimmung der Anzahl von Curven gegebener Definition, welche so viel Bedingungen genügen, wie ihre Constantenzahl beträgt; und das zur Lösung anzuwendende Verfahren besteht immer in der Einführung von Systemen, deren allgemeine Curve eine um 1 grössere Constantenzahl besitzt, und welche die gesuchten als besondere Curven enthalten. Zugleich werden in einem solchen System noch andere besondere Curven (Ausartungen) vorkommen, und von der Möglichkeit, hinreichend viele Relationen zwischen den Anzahlen derselben zu ermitteln, hängt die Lösbarkeit der gestellten Aufgabe ab. Es hat sich gezeigt, dass, selbst bei der Beschränkung auf sogenannte elementare Systeme, schon für $n = 3$ und $n = 4$ die Auffindung aller Ausartungen, und noch mehr die Aufstellung der zwischen ihren Anzahlen bestehenden Relationen mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden ist. Der Grund hiervon liegt in dem Auftreten von Curven mit *mehrfach zählenden Zweigen* (»Mangefoldsgrene»), welche den elementaren Berührungsbedingungen genügen, wenn die Zahl der letzteren eine gewisse Grenze übersteigt.

Wohl aber ergeben sich allgemeine, d. h. für Curven jeder Ordnung, oder doch für hinreichend grosse n geltende Resultate aus den Formeln

[1] Kopenhagen, Höst. Ursprünglich im 10[ten] Bande der Videnskabernes Selskabs Skrifter publicirt.

des § 24 der erwähnten Zeuthen'schen Abhandlung, von deren Inhalt ich die beiden ersten Abschnitte hier als bekannt voraussetze. Das Bestehen dieser Gleichungen ist an die Bedingung geknüpft, dass die Curven α' mit einer neuen Doppeltangente die einzigen mit einem mehrfach zählenden Punctorte behafteten Ausartungen des Systems sind. Setzt man noch, was im Folgenden geschehen soll, $\alpha' = 0$, dann lässt sich die Gültigkeitsbedingung einfach dahin aussprechen, dass im System keinerlei besondere Curven der genannten Art vorkommen.

Diese Voraussetzung ist es, welche den nachfolgenden Entwicklungen zu Grunde liegt. In dem ersten Theile derselben habe ich mir hauptsächlich die Aufgabe gestellt, nachzuweisen, dass alle hier in Betracht kommenden Zahlen bestimmbar sind. Der zweite Theil enthält die Ausdehnung einiger der erhaltenen Resultate auf Plancurven in nicht fester Ebene.

A. Plancurven in fester Ebene.

§ 1.

Übergang von niederen zu höheren Systemen.

1. Sobald für ein System die Zahlen μ, b, c bekannt sind, findet sich die zweite Characteristik aus der Gleichung

$$\mu' = 2(n - 1)\mu - 2b - 3c.$$

Sagen nun die

$$\frac{n(n+3)}{2} - d - 2e - 1 = s + t$$

elementaren Bedingungen aus, dass die Curven durch s gegebene Puncte gehen, und t gegebene Geraden berühren sollen, dann ist μ' die erste Characteristik für ein zweites System, in welchem s, t durch $s - 1$, $t + 1$ ersetzt sind; immer vorausgesetzt, dass t eine gewisse Grenze nicht über-

schreitet. Es liegt daher keine wesentliche Beschränkung in der Annahme, welche im Folgenden der Einfachheit wegen gemacht werden soll, dass sich die elementaren Bedingungen sämmtlich auf gegebene Puncte beziehen.

Ein solches System soll kurz (d, e) genannt, und die Zahl μ desselben gelegentlich mit $[d, e]$ bezeichnet werden, auch dann, wenn ein Theil der singulären Puncte den weiteren Bedingungen zu genügen hat, bzw. in gegebenen Geraden, oder an gegebenen Stellen zu liegen, oder wenn gefordert wird, dass zwei der $d + e$ Puncte in einer Geraden liegen sollen, die entweder gegeben ist, oder sich um einen gegebenen Punct dreht.

Ohne Rücksicht darauf, ob die singulären Puncte sämmtlich frei sind oder nicht, möge von zwei Systemen (d_1, e_1), (d, e) ersteres das *einfachere* oder *niedere* heissen, wenn entweder $d_1 + e_1 < d + e$, oder wenn zwar $d_1 + e_1 = d + e$, aber $e_1 < e$ ist. Als *nächst* höheres System zu (d, e) kann man sowohl $(d + 1, e)$ als $(d - 1, e + 1)$, als nächst niederes $(d - 1, e)$ und $(d + 1, e - 1)$ ansehen.

2. Es soll nun untersucht werden, wie weit die Zeuthen'schen Gleichungen ausreichen, die in ihnen vorkommenden, auf das System (d, e) bezüglichen Zahlen unter der Voraussetzung zu bestimmen, *dass für die niederen Systeme bereits alle Zahlen bekannt sind.*

Aus jenen Formeln lassen sich zunächst die folgenden drei herleiten:

$$\begin{aligned}(1)\qquad \alpha = {} & [3(n-1)^2 - 7d - 12e]\mu - (7n - 12e - 18)b \\ & - 6(2n - 2d - 3e - 3)c - 24\gamma_0' - 12y - 18z \\ & + 4(2d) + 15(3d) - 18(d2e);\end{aligned}$$

$$(2)\qquad \beta = 2d\mu + (2n - 3e - 6)b - 3dc + 3y - 2(2d) - 6(3d) + 4(d2e);$$

$$\begin{aligned}(3)\qquad \gamma = {} & \tfrac{5}{2}e\mu - 2eb + \left(\tfrac{5}{2}n - 2d - 6e - 3\right)c + 12\gamma_0' + 2y + 6z \\ & + \tfrac{3}{2}(2de) + 6(d2e).\end{aligned}$$

Die zweite ergiebt sich aus (15), (10) und (7); die erste dadurch, dass man den Werth von α aus (3') entnimmt, dann b' und c' mit Hülfe von (12) und (9) durch u, v, p, q ausdrückt, endlich die Gleichungen

(4), (14), (11), (10) und den bereits erhaltenen Werth von β benutzt; die dritte findet man aus (5) in Verbindung mit (11) und (14).

Bei ungleicher Definition der Doppelpuncte oder Spitzen darf man selbstverständlich die Formeln (2), (3) *nicht für die Theilzahlen* in Anspruch nehmen, deren Unterscheidung dann erforderlich wird; z. B. wenn ein Doppelpunct in einer Geraden liegt, und es sich um das auf ihn bezügliche Theil-β handelt; oder wenn eine der Spitzen gegeben ist, und gesucht wird, wie oft eine der $e - 1$ freien Spitzen in einen Selbstberührungspunct übergeht. Einen Ausdruck für solche Theilzahlen erhält man ebenfalls aus den zur Herleitung von (2), (3) dienenden Gleichungen, nur hat man die Bedeutung der in letzteren vorkommenden Zahlen auf die betreffenden irreductiblen Theil-Örter einzuschränken.

Die Zahlen α_1, α_2, β', γ_1, γ'_0, welche überhaupt nur dann von Null verschieden sind, wenn d eine gewisse von n abhängige Grenze übersteigt, können, bei dem Fortschreiten von niederen zu höheren Systemen, als bekannt angesehen werden. So z. B. bestehen die γ'_0 Curven aus einer C_{n-1} mit einem Selbstberührungspunct, $d - n + 5$ Doppelpuncten und $e - 4$ Spitzen, und aus der Tangente des Selbstberührungspunctes (l. c. pag. 16). Die Restcurve hat stets weniger als $d + e$ singuläre Puncte.

Sieht man von diesen als bekannt zu betrachtenden Zahlen ab, dann lassen sich alle übrigen ausdrücken durch die folgenden neun, zwischen welchen keine Relationen mehr bestehen:

$$\mu,\ b,\ c,\ y,\ z,\ (2d),\ (3d),\ (2de),\ (d2e).$$

Dies folgt aus den Gleichungen (3) — (14) für μ', α, β, γ, b', c', u, v, p, q, x, (de), $(2e)$; ferner berechnet man u', v', p', q' aus (4′), (5′), (9′), (12′), dann y', z', $(2d'e')$, $(d'2e')$ aus (7′), (8′), (11′), (14′), u. s. w.

Von den genannten neun Zahlen können

$$\mu,\ b,\ c,\ y,\ z,\ (2d)$$

als bekannt gelten. Es ist μ das durch d dividirte α des Systems $(d - 1, e)$ oder auch das durch e dividirte β des Systems $(d + 1, e - 1)$; b ist das durch $d - 1$ dividirte α eines Systems $(d - 1, e)$, von dessen Doppelpuncten einer in einer gegebenen Geraden liegt; c ist das durch d dividirte α eines Systems $(d - 1, e)$ von dessen Spitzen eine in einer gegebenen Geraden liegt, oder das auf den bevorzugten Doppelpunct des vorerwähnten

Systems bezügliche β. Ferner sind y, z Zahlen α je eines Systems $(d-1, e)$, oder Theil-β von $(d+1, e-1)$, wenn nur in beiden Fällen eine Systemsbedingung aussagt, dass die Verbindungsgerade zweier singulären Puncte durch einen gegebenen Punct gehe. Auch x darf als bekannt gelten, da es, wenn nicht als Zahl α, so doch auf andere Art bestimmbar ist, wie am Schlusse dieses Paragraphen gezeigt werden soll; $(2d)$ endlich ist das γ des einfacheren Systems $(d-2, e+1)$.

3. Dagegen ist nicht ohne Weiteres ersichtlich, dass auch

$$(3d), \quad (2de), \quad (d2e)$$

auf Zahlen niederer Systeme zurückführbar sind. Die Curven, um welche es sich hier handelt, sind solche mit einem dreifachen Puncte, der mit

$$\Delta, \quad \Delta^{(2)}, \quad \Delta^{(3)}$$

bezeichnet werden soll, je nachdem seine Tangenten getrennt liegen, oder zwei derselben, oder alle drei zusammenfallen; und die fraglichen Zahlen sind, in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$[\Delta, d-3, e], \quad [\Delta^{(2)}, d-2, e-1], \quad [\Delta^{(3)}, d-1, e-2].$$

Um den Nachweis ihrer Bestimmbarkeit zu führen, wird es nothwendig sein, einige Zahlenrelationen für solche Systeme aufzustellen, deren allgemeine Curve, ausser Doppelpuncten und Spitzen, entweder einen Punct Δ oder $\Delta^{(2)}$ besitzt.

In beiden Fällen sei B die Ordnung des von den dreifachen Puncten gebildeten Ortes, während sich U, ξ, η auf die von Δ oder $\Delta^{(2)}$ ausgehenden, anderswo berührenden Tangenten, bzw. die Verbindungsgeraden mit einem Doppelpuncte oder einer Spitze beziehen. Im ersten Falle sei T der Grad des Tangentenortes von Δ; im zweiten ist zu unterscheiden zwischen T_{12} und T_3, dem Orte der beiden zusammenfallenden und der dritten Tangente. — Bei Systemen dieser Art können wohl die Doppelpuncte und Spitzen sich zu dreien vereinigen, aber es können *nicht gleichzeitig zwei derselben mit Δ oder $\Delta^{(2)}$ zusammenfallen.*

Die einzige Ausartung $(2t)$ von Δ ist ein dreifacher Punct mit zwei zusammenfallenden Tangenten. Durch Coincidenz eines Doppelpunctes mit Δ entsteht ein dreifacher Punct $(\overline{2t})$, von dessen Tangenten zwar nur

zwei zusammenfallen, der sich aber von $(2t)$ dadurch unterscheidet, dass die singuläre Tangente fünfpunctig trifft; während zwei Äste einen Selbstberührungspunct bilden, geht der dritte in beliebiger Richtung hindurch. Durch Vereinigung einer Spitze mit Δ entsteht ebenfalls ein dreifacher Punct $(2t)^{(2)}$ mit zwei zusammenfallenden Tangenten, und zwar bilden die beiden einander berührenden Äste eine Spitze zweiter Art.

In dem System, dessen allgemeine Curve bereits einen Punct $\Delta^{(2)}$ besitzt, kommen zwei Ausartungen dieses letzteren in Betracht, welche eine Erniedrigung der Classe um 1 herbeiführen. Derselbe kann nicht nur in einen Punct $(3t)$ mit lauter zusammenfallenden Tangenten übergehen, sondern auch in einen Punct $(\overline{2t})$, und zwar vollzieht sich dieser Übergang in derselben Weise, wie der einer Spitze in einen Selbstberührungspunct. Andere specielle dreifache Puncte entstehen durch Vereinigung eines Doppelpunctes oder einer Spitze mit $\Delta^{(2)}$; jedoch ist es für den vorliegenden Zweck nicht nothwendig, auf diese einzugehen.

Für Systeme der erstgenannten Art gelten unter anderen die folgenden Relationen, welche wie die entsprechend numerirten Zeuthen'schen bewiesen werden:

$$(3_a)\qquad 2(n-1)\mu = \mu' + 6B + 2b + 3c;$$

$$(4_a)\qquad n'B + \mu' = 2T + U + (2t);$$

$$(10_a)\qquad (n-3)B + \mu = T;$$

$$(13_a)\qquad (n-4)[(n-3)B + 2\mu] = U + 2\xi + 3\eta.$$

Aus ihnen folgt für das System

$$(\Delta,\ d-2,\ e-1)$$

$$(2t) = 4\mu + (4n - 2d - 3e - 11)B - 2b - 3c + 2\xi + 3\eta.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält nur Bekanntes; denn μ ist das $(3d)$ des Systems $(d+1,\ e-1)$; B, b, c sind Theil-$(3d)$ je eines solchen Systems, von dessen singulären Puncten einer in einer gegebenen Geraden liegt, und Ähnliches gilt von ξ, η. Daher ist

$$(2t) = [\Delta^{(2)},\ d-2,\ e-1]$$

bekannt, und da in Folge der ZEUTHEN'schen Gleichung (6)

$$6.(3d) + 3(2de) = 6[\Delta, d-3, e] + 3[\Delta^{(2)}, d-2, e-1]$$

durch Bekanntes ausdrückbar ist, so ist ebenfalls $(3d)$ bestimmbar.

4. Hiernach ist auf der rechten Seite der β-Formel (2) die einzige Unbekannte $(d2e)$, während β im Allgemeinen durch Anwendung der α-Formel auf das System $(d-2, e+1)$ gefunden wird. Nur wenn $d=1$ ist, fehlt diese Möglichkeit. Daher bleibt noch zu zeigen, wie

$$[\Delta^{(3)}, e-2]$$

aus Zahlen solcher Systeme, welche niedriger als $(1, e)$ sind, berechnet werden kann.

Die gesuchten Curven sind in dem System

$$(\Delta^{(2)}, e-2)$$

enthalten, dessen allgemeine Curve ausser einem dreifachen Puncte mit zwei zusammenfallenden Tangenten nur noch $e-2$ Spitzen hat, und für welches die Gleichungen gelten:

(3b) $$2(n-1)\mu = \mu' + 7B + 3c;$$

(5b) $$n'B + \mu' = 3T_{12} + 2T_3 + U + (\overline{2t}) + 3.(3t);$$

(10b) $$(n-3)B + \mu = 2T_{12} + T_3$$

(13b) $$(n-4)[(n-3)B + 2\mu] = U + 3\eta.$$

Es könnte scheinen, als genügte es zur Bestimmung von $(3t)$, T_{12} und T_3 zu kennen, und als brauchte man nur zu berechnen, wie oft die dritte Tangente mit der singulären coincidirt, ohne dass gleichzeitig eine Spitze in $\Delta^{(2)}$ fällt; dabei aber veranlasst der Umstand Schwierigkeit, dass die Coincidenzen einer Spitze mit $\Delta^{(2)}$ zweierlei Art sind, und nur zum Theil das Zusammenfallen aller drei Tangenten zur Folge haben.

Um T_{12}, T_3 zu bestimmen, gehe man aus von dem System

$$(\Delta_p, e-2),$$

wo der Index p die Bedingung ausdrückt, dass eine Tangente T_1 von Δ durch einen gegebenen Punct M gehen soll. Die Aufgabe besteht dann

darin, zu ermitteln, wie oft eine der weiteren Tangenten T_2, T_3 mit T_1, und wie oft T_2, T_3 unter sich zusammenfallen, ohne dass gleichzeitig eine Spitze sich mit Δ vereinigt. Werden zur Unterscheidung die Zahlen dieses Systems mit μ_1, B_1, c_1, η_1 bezeichnet, und giebt Δ_0 die Bedingung an, dass ein dreifacher Punct an gegebener Stelle liegen soll, dann ist

$$(n-4)B_1 + \mu_1 + 3[\Delta_0, e-2]$$

der Grad des von T_2, T_3 beschriebenen Linienortes, und es ist daher leicht, die volle Zahl jener Tangentencoincidenzen auszudrücken. — Die Coincidenzen einer Spitze mit Δ vertheilen sich auf solche $(2t)_p^{(2)}$ Curven, welche die singuläre Tangente durch M schicken, und auf $(2t)^{(2)}t_p$ andere, bei welchen sich T_2, T_3 vereinigen; also ist

$$2(2t)_p^{(2)} + (2t)^{(2)}t_p = (e-2)B_1 + c_1 - \eta_1,$$

wo die erste Zahl doppelt gerechnet werden muss, weil die betreffenden Curven zwei Mal die Tangentenbedingung erfüllen. Nun findet man $(2t)_p^{(2)}$ direct aus dem System $(\Delta, e-2)$ dessen Curven eine der Spitzen in der Geraden ΔM haben, als Coincidenzen dieser bevorzugten Spitze mit Δ; mithin ist auch $(2t)^{(2)}t_p$ bekannt, und man braucht nur die Reductionen

$$3\cdot(2t)_p^{(2)}, \qquad 3\cdot(2t)^{(2)}t_p$$

an den erwähnten Tangentencoincidenzen anzubringen, um T_{12}, T_3 zu finden. Die Formel (10b) kann zur Bestätigung dienen; denn sowohl μ, B, als μ_1, B_1, c_1, η_1 sind in einfacher Weise durch die Zahlen des Systems $(\Delta, e-2)$ ausdrückbar. Da nun μ, B, c, η sämmtlich Zahlen $(2de)$ je eines Systems $(2, e-1)$ sind, so bleiben in der Gleichung (5b) nur noch $(\overline{2t})$ und $(3t)$ unbekannt; und der verlangte Beweis wird erbracht sein, sobald es gelingt, $(\overline{2t})$ zu bestimmen.

5. Diese Zahl kann andererseits aufgefasst werden als die der Coincidenzen des Doppelpunctes mit dem dreifachen Puncte in dem System

$$(\Delta, 1, e-2).$$

Dasselbe enthält zwar einen Doppelpunct mehr als die vorher zur Anwendung gekommenen; es lässt sich aber zeigen, dass mindestens dieje-

nigen drei seiner Zahlen bestimmt werden können, welche zur Berechnung von $(\overline{2t})$ erforderlich sind.

Gehen wir *erstens* von dem einfacheren Systeme

$$(\Delta,\ e-2)$$

aus, und legen aus einem festen Puncte M die Tangenten an die Curven desselben, verbinden ferner die Berührungspuncte X mit einem Puncte M_2 durch eine Gerade, welche noch in $n-1$ Puncten Y trifft. Eine Coincidenz von Y mit X tritt nicht nur ein für jeden neuen Doppelpunct, sondern auch, wenn X ein von M verschiedener Punct der Geraden MM_2 ist, wenn der Punct Δ oder eine Spitze eine Tangente durch M schickt, ferner für jeden Übergang des Punctes Δ in einen Punct $(2t)$, endlich für jeden aus einer Spitze entstandenen Selbstberührungspunct. Da nun der X-Ort von der Ordnung $\mu'+\mu$ ist, und M zum μ-fachen Punct hat, so hat der Y-Ort die Ordnung $(n-1)(\mu'+\mu)+n'\mu$, und eben so oft coincidirt Y mit X. Mithin ist

$$\alpha=(n-2)\mu'+(n+n'-1)\mu-2T-3q-3(2t)-3\gamma,$$

wo sich T und $(2t)$, wie früher, durch μ, B, c, η ausdrücken lassen, während aus

$$(5^a)\qquad n'c+(e-2)\mu'=3q+v+\gamma;$$

$$(11^a)\qquad (n-2)c+(e-2)\mu=2q+(2t)^{(2)};$$

$$(14^a)\qquad (n-3)[(n-2)c+2(e-2)\mu]=v+6z+6\eta;$$

$$(2t)^{(2)}=(e-2)B+c-\eta$$

die Darstellbarkeit von q und γ durch μ, B, c, η, z folgt.

Fügt man *zweitens* den Systemsbedingungen $(\Delta,\ e-2)$ noch die hinzu, dass die Curven eine gegebene Gerade G berühren sollen, dann wird die erste Characteristik des neuen Systems

$$\mu_1=2(n-1)\mu-6B-3c,$$

und wenn Δ_0, bzw. E_0 die Bedingung ausdrückt, dass der betreffende singuläre Punct gegeben sein soll, so ist

$$(X) = \mu - 6[\Delta_0, e-2] - 3[E_0, \Delta, e-3]$$

die Zahl der in einem gegebenen Puncte X von G berührenden Curven. Es hat also der Y-Ort, der durch die $n-1$ weiteren Schnittpuncte der Geraden MX erzeugt wird, die Ordnung

$$(Y) = \mu_1 + (n-1)(X),$$

und schneidet in so viel Puncten die Gerade G. Dieses sind theils solche Stellen, in welchen die Berührungsbedingung dadurch erfüllt wird, dass X ein neuer Doppelpunct ist; theils diejenigen dreifachen Puncte und Spitzen, welche G zur Tangente haben; endlich die in G liegenden Puncte $(2t)$ und Selbstberührungspuncte. Um daher

$$[\Delta, D_g, e-2]$$

zu erhalten, braucht man nur (Y) zu vermindern um Zahlen T, q, $(2t)$, γ, die sich auf die Systeme $(\Delta_g, e-2)$, $(\Delta, E_g, e-3)$ beziehen, also bekannt sind. Der Index g bezeichnet hier die Bedingung, dass der singuläre Punct in G liegen soll.

Denkt man *drittens* für jede Lage einer sich um den festen Punct M drehenden Geraden die endlich vielen Curven construirt, welche in ihr einen dreifachen Punct besitzen, sie anderswo in einem Puncte X berühren, und $e-2$ Spitzen haben, so wird ein System erzeugt, dessen erste Characteristik μ_2 gleich dem U des Systems $(\Delta, e-2)$, also bekannt ist. Den Grad (X) des X-Ortes findet man am leichtesten aus der Zahl

$$2(n-4)\{[\Delta_g, e-2] - 3[\Delta_0; e-2]\} - 3[\Delta_g, E_g, e-3]$$

der bei gegebener Lage der Geraden $M\Delta$ vorhandenen berührenden Curven, und aus der Vielfachheit in M, welche letztere durch eine Strahlencorrespondenz ermittelt wird. Man definire wieder einen Ort der Ordnung

$$(Y) = \mu_2 + (n-1)(X)$$

als den der $n-1$ weiteren Schnittpuncte einer Geraden M_2X. Die Coincidenzen von Y mit X treten ein, wenn 1) X ein auf der beweglichen Geraden $M\Delta$ liegender neuer Doppelpunct ist; 2) die Gerade in die Lage MM_2 kommt; 3) die bewegliche Gerade Spitzentangente wird; 4) auf ihr

ein Selbstberührungspunct liegt; 5) X mit Δ zusammenfällt. Die Zahlen unter 3) und 4) sind Theil-q, resp. Theil-γ des Systems (Δ, $e-2$) mit der Nebenbedingung, eine Spitze in der Geraden $M\Delta$ zu haben; die unter 2) und 5) lassen sich ebenfalls durch Bekanntes ausdrücken; man findet daher auf diese Weise das ξ des Systems (Δ, 1, $e-1$). — Ein analoges Verfahren kann übrigens zur Bestimmung der Zahl x des Systems (d, e) dienen.

Ersetzt man noch in dem System, in Bezug auf welches die α-Formel hergeleitet wurde, die Bedingung Δ durch Δ_g, dann giebt der Ausdruck α das B des Systems (Δ, 1, $e-2$) an. Das Bekanntsein der drei Zahlen B, b, ξ dieses letzteren genügt zur Bestimmung von $(\overline{2t})$.

Hiermit ist die Möglichkeit der Berechnung von $(3t)$ aus der Formel (5b) dargethan.

---

§ 2.

Beispiele.

Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass man durch Anwendung der Gleichungen (1), (2) auf ein bekanntes System Zahlen eines nächst höheren Systems erhält. Die anfänglich gemachte Voraussetzung, nach welcher solche Systeme auszuschliessen sind, in welchen Curven mit Doppelzweigen vorkommen, ist immer dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\text{mindestens } \frac{n^2-n+4}{2}$$

feste Puncte gegeben sind, durch welche die Curven gehen sollen (vgl. l. c. § 34). Als *nothwendige* Bedingung hat man daher zunächst, wenn die singulären Puncte sämmtlich frei sind

$$d+2e<2n-1,$$

und allgemeiner, wenn von den d Doppelpuncten d_g in gegebenen Geraden

liegen, und d_0 gegeben sind, ferner e_g, e_0 für die etwa vorhandenen nicht freien Spitzen entsprechende Bedeutung haben:

$$d + 2e + d_g + e_g + d_0 + e_0 < 2n - 1.$$

Eine weitere Einschränkung ist erforderlich, wenn man auch solche Systeme ausschliessen will, welche zwar irreductibel sind, aber *zerfallende Curven* enthalten. Sobald nun $d \geqq n - 1$ ist, enthält das System stets endlich viele Curven, die aus einer Geraden und einer C_{n-1} bestehen, für $d \geqq 2(n-2)$ auch solche, bei welchen sich zwei gerade Linien abtrennen (l. c. § 6, 8). Diese besonderen Curven α_1, α_2 gehören zu den α, welche einen neuen Doppelpunct besitzen, sind also von dem Ergebniss der Formel (1) in Abzug zu bringen, wenn es sich nur um die nicht zerfallenden, der Aufgabe genügenden Curven handelt. Die Zahl dieser letzteren aber ist es, welche das μ des nächst höheren Systems bestimmt; ohne die erwähnte Reduction würde sich das gefundene μ auf ein zerfallendes System beziehen, auf welches die Zeuthen'schen Gleichungen nicht mehr sämmtlich anwendbar sind.

Bei der Berechnung der nachfolgenden Beispiele ist auf diesen Umstand keine Rücksicht genommen, weil bei gegebenen kleinen d, n unbestimmt gross, d. h.

$$d < n - 1$$

für alle zur Verwendung kommenden Systeme vorausgesetzt wurde. Hieraus, in Verbindung mit den obigen Bedingungen, ergiebt sich von selbst, wie weit die erhaltenen Resultate gültig sind.

Statt der bisherigen Bezeichnung $[d, e]$ soll jetzt, wenn d, e gegebene Zahlen sind,

$$[d.D,\ e.E]$$

gesetzt werden. Die Indices g, 0 bedeuten, dass der betreffende singuläre Punct in einer gegebenen Gerade, bzw. an gegebener Stelle liegt. Sind für mehrere singuläre Puncte Bedingungen g vorgeschrieben, und beziehen sich diese auf *verschiedene* Geraden, so sollen auch die Buchstaben g durch Indices unterschieden werden. — S bedeutet einen Selbstberührungspunct. Die Bedeutung der hinzuzudenkenden Bedingungen, so wie der Zeichen Δ, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ ist in 1. und 3. des vorigen Paragraphen erklärt. Für

diejenigen Leser, welchen die »*Almindelige Egenskaber*» nicht bekannt sind, sei noch bemerkt, dass (de) eine Spitze zweiter Art ist, wie sie durch Zusammenfallen eines Doppelpunctes mit einer gewöhnlichen Spitze entsteht; ($2e$) dagegen einen aus der Vereinigung zweier Spitzen entstandenen Selbstosculationspunct bedeutet.

Die jeder Formel als Gültigkeitsbedingung hinzugefügte untere Grenze für n bezieht sich auf die Ausschliessung aller zerfallenden Curven der verlangten Beschaffenheit. Wollte man diese letzteren Lösungen mitzählen, so würden viele der folgenden Resultate auch für kleinere n richtig bleiben. Z. B. giebt der Ausdruck $[3D]$ für $n = 3, 4$ noch die richtigen Zahlen 15, 675; im ersten Falle genügen nur zerfallende Curven der Aufgabe; im zweiten sind 620 eigentliche und 55 uneigentliche Lösungen vorhanden.

$$[D_0D] = 3(n-1)^2 - 7; \qquad (n>3)$$

$$[D_gD] = 9n^3 - 27n^2 - n + 30; \qquad (n>3)$$

$$[D_0 2D] = \frac{3}{2}(3n^4 - 12n^3 - 10n^2 + 55n + 10); \qquad (n>4)$$

$$[D_g 2D] = \frac{3}{2}(9n^5 - 45n^4 - 8n^3 + 259n^2 - 129n - 250); \qquad (n>4)$$

$$[D_0 3D] = \frac{1}{2}(9n^6 - 54n^5 - 54n^4 + 675n^3 - 128n^2 - 2224n + 318); \qquad (n>5)$$

$$[D_g 3D] = \frac{3}{2}(9n^7 - 63n^6 - 21n^5 + 867n^4 - 771n^3 - 3533n^2 + 3386n + 3288); \qquad (n>5)$$

$$[2D] = \frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2 - 3n - 11); \qquad (n>3)$$

$$[3D] = \frac{1}{2}(9n^6 - 54n^5 + 9n^4 + 423n^3 - 458n^2 - 829n + 1050); \qquad (n>4)$$

$$[4D] = \frac{3}{8}(n-3)(9n^7 - 45n^6 - 135n^5 + 801n^4 + 691n^3 - 4671n^2 - 1386n + 7880); \qquad (n>5)$$

$$[5D] = \frac{3}{40}(27n^{10} - 270n^9 - 45n^8 + 7830n^7 - 13920n^6 - 84714n^5$$
$$+ 214765n^4 + 393980n^3 - 1176127n^2 - 631286n + 2046840). \quad (n > 6)$$

$$[D_{g_1} D_{g_2}] = 9n^2 - 18n + 2; \quad (n > 3)$$
$$[D_{g_1} D_{g_2} D_{g_3}] = 9(n-1)(3n^2 - 6n - 4); \quad (n > 4)$$
$$[D_{g_1} D_{g_2} \ldots D_{g_h}] = 3(n-1)[D_{g_1} \ldots D_{g_{h-1}}] - 7(h-1)[D_{g_1} \ldots D_{g_{h-2}}]. \quad (n > h+1)$$

Um zu bestimmen, wie viele Curven h Doppelpuncte in *einer und derselben* Geraden G besitzen, stelle man die etwas allgemeinere Forderung, dass die Curven durch a gegebene Puncte von G einfach gehen, an d_0 gegebenen Stellen von G einen Doppelpunct, und ausserdem h Doppelpuncte auf G haben sollen. Es muss

$$a + 2d_0 + 2h \leqq n$$

sein, damit überhaupt irreductible Curven der Aufgabe genügen können.

Von den

$$\frac{n(n+3)}{2} - a - 3d_0 - 2h$$

weiteren gegebenen Puncten nehme man speciell

$$A = n + 1 - a - 2d_0 - 2h$$

in G liegend an, so dass noch

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - d_0$$

derselben frei bleiben. Diese letzteren und die d_0 Puncte auf G bestimmen eine C_{n-1}, welche, in Verbindung mit G, allen Forderungen genügt, und zwar die Bedingung, h weitere Doppelpuncte auf G zu besitzen, $\binom{n-1-d_0}{h}$ mal erfüllt. — Die nicht zerfallenden, der Aufgabe

genügenden Curven haben mindestens einen der h Doppelpuncte in den A Puncten, und müssen, wenn λ Doppelpuncte in Puncten A liegen, durch die $A - \lambda + a$ Puncte einfach gehen. Man hat also für die gesuchte Zahl die Recursionsformel

$$f(a,\, d_0,\, h) = \binom{n-1-d_0}{h} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=h} \binom{A}{\lambda} \cdot 2^\lambda f(A + a - \lambda,\ d_0 + \lambda,\ h - \lambda),$$

und findet so

$$[2D_g] = \frac{1}{2}(n-2)(9n-25) \qquad (n>3)$$

$$[3D_g] = \frac{1}{2}(n-3)(9n^2 - 75n + 154) \qquad (n>5)$$

u. s. f.

$$[E_0] = 2; \qquad [E_g] = 8n - 12; \qquad [E] = 12(n-1)(n-2); \qquad (n>2)$$

$$[E_0 D] = 6(n-3)(n+1); \qquad [D_0 E] = 12n(n-3); \qquad (n>2)$$

$$[D_{g_1} E_{g_2}] = 12(2n^2 - 5n + 1); \qquad (n>3)$$

$$[D_g E_g] = 12(n-3)(2n-5); \qquad (n>2)$$

$$[E_g D] = 12(n-3)(2n^2 - n - 5); \qquad (n>2)$$

$$[E_g 2D] = 6(6n^5 - 33n^4 - 16n^3 + 270n^2 - 101n - 444); \qquad (n>4)$$

$$[E_g 3D] = 2(18n^7 - 135n^6 - 90n^5 + 2385n^4 - 1789n^3 - 13028n^2 + 10737n + 19812); \qquad (n>5)$$

$$[E_g ED] = 12(24n^5 - 156n^4 - 10n^3 + 1422n^2 - 1107n - 2169); \qquad (n>4)$$

$$[D_g E] = 12(n-3)(3n^2 - 3n - 4); \qquad (n>2)$$

$$[D_g 2E] = 18(12n^5 - 84n^4 + 43n^3 + 639n^2 - 806n - 480); \qquad (n>4)$$

$$[D_0 DE] = 36(n^4 - 5n^3 - 2n^2 + 28n - 8); \qquad (n>4)$$

$$[D_g DE] = 12(9n^5 - 54n^4 + 8n^3 + 369n^2 - 326n - 324); \qquad (n>4)$$

$$[E_0 E] = 12(2n^2 - 6n - 3); \qquad (n > 3)$$

$$[E_g E] = 24(4n^3 - 18n^2 + 5n + 33); \qquad (n > 3)$$

$$[E_{g_1} E_{g_2}] = 4(16n^2 - 48n + 15); \qquad [2E_g] = (n - 3)(32n - 105); \qquad (n > 3)$$

$$[2E] = 18(n - 3)(4n^3 - 12n^2 - 19n + 45); \qquad (n > 2)$$

$$[3E] = 4(72n^6 - 648n^5 + 486n^4 + 9234n^3 - 18938n^2 - 27786n + 67500); \qquad (n > 3)$$

Diese Formel giebt auch noch für $n = 4$ die richtige Zahl 400, obgleich dieses aus der Herleitung nicht ohne Weiteres hervorgeht.

$$[DE] = 12(n - 3)(3n^3 - 6n^2 - 11n + 18); \qquad (n > 3)$$

$$[2D, E] = 18(n - 3)(3n^5 - 12n^4 - 30n^3 + 125n^2 + 82n - 280); \qquad (n > 4)$$

$$[3D, E] = 6(9n^8 - 81n^7 + 9n^6 + 1656n^5 - 2831n^4 - 10975n^3 + 24851n^2 + 22414n - 55320); \qquad (n > 5)$$

$$[D, 2E] = 18(12n^6 - 96n^5 + 47n^4 + 1188n^3 - 2003n^2 - 3330n + 6570); \qquad (n > 4)$$

$$[2D, 2E] = 9(n - 4)(36n^7 - 216n^6 - 759n^5 + 5562n^4 + 4703n^3 - 45799n^2 - 8040n + 110403). \qquad (n > 5)$$

$$[S_0] = 5; \qquad [S_g] = 25n - 48; \qquad [S] = 50n^2 - 192n + 168; \qquad (n > 3)$$

$$[S_{g_1} D_{g_2}] = 3(25n^2 - 73n + 20); \qquad [S_g D_g] = 75n^2 - 457n + 696; \qquad (n > 3)$$

$$[S_0 D] = 3(5n^2 - 10n - 23); \qquad [D_0 S] = 2(25n^2 - 96n + 42); \qquad (n > 3)$$

$$[D_g S] = 6(25n^3 - 121n^2 + 96n + 98); \qquad (n > 3)$$

$$[S_g D] = 3(25n^3 - 98n^2 - 47n + 316); \qquad (n > 3)$$

$$[E_g S] = 2(200n^3 - 1068n^2 + 774n + 1575); \qquad (n > 3)$$

$$[S_g E] = 6(50n^3 - 246n^2 + 38n + 669); \qquad (n > 3)$$

$$[SD] = 6(n - 3)(25n^3 - 71n^2 - 122n + 280); \qquad (n > 2)$$

$$[SE] = 12(50n^4 - 342n^3 + 319n^2 + 1695n - 2682); \qquad (n > 3)$$

$$[S,\ 2D] = 3(75n^6 - 588n^5 + 244n^4 + 7263n^3 - 11710n^2 - 21162n + 40452); \qquad (n > 4)$$

$$[D,\ E,\ S] = 12(150n^6 - 1326n^5 + 899n^4 + 18825n^3 - 37023n^2 - 59346n + 138420). \qquad (n > 4)$$

$$(de)_0 = 12; \qquad (de)_g = 24(3n - 7); \qquad (de) = 60(n - 3)(3n - 5). \qquad (n > 3)$$

$$(2e)_0 = 30; \qquad (2e)_g = 30(7n - 19);$$

$$(2e) = 18(35n^2 - 190n + 239). \qquad (n > 3)$$

$$[\Delta_g] = 6(n - 2); \qquad [\Delta] = 15(n - 2)^2; \qquad (n > 3)$$

$$[\Delta_0 D] = 3n^2 - 6n - 17; \qquad [D_0 \Delta] = 5(3n^2 - 12n + 8); \qquad (n > 4)$$

$$[\Delta_0 E] = 12(n - 4)(n + 1); \qquad [E_0 \Delta] = 6(5n^2 - 20n + 8); \qquad (n > 4)$$

$$[\Delta_g D] = 18n^3 - 72n^2 - 50n + 276; \qquad (n > 4)$$

$$[D_g \Delta] = 45n^3 - 225n^2 + 220n + 132; \qquad (n > 4)$$

$$[\Delta_g E] = 72(n - 4)(n^2 - n - 4); \qquad (n > 3)$$

$$[E_g \Delta] = 12(10n^3 - 55n^2 + 52n + 60); \qquad (n > 4)$$

$$[\Delta D] = 3(n - 2)(15n^3 - 60n^2 - 65n + 314); \qquad (n > 4)$$

$$[\Delta E] = 36(n - 4)(5n^3 - 15n^2 - 26n + 76); \qquad (n > 3)$$

$$[\Delta_0 2D] = \frac{3}{2}(3n^4 - 12n^3 - 36n^2 + 107n + 158); \qquad (n > 4)$$

$$[\Delta_g 2D] = 3(9n^5 - 54n^4 - 56n^3 + 649n^2 - 112n - 1695); \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta, 2D] = \frac{3}{2}(45n^6 - 360n^5 + 120n^4 + 4869n^3 - 8006n^2 - 15006n + 30468); \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta DE] = 36(15n^6 - 135n^5 + 87n^4 + 2035n^3 - 4086n^2 - 6596n + 16160); \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta D_g D] = 3(45n^5 - 315n^4 + 155n^3 + 2514n^2 - 3560n - 1302); \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[S_g \Delta] = 3(125n^3 - 740n^2 + 650n + 1284); \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta_g S] = 6(50n^3 - 292n^2 + 147n + 786). \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta_0^{(2)}] = 4; \quad [\Delta_g^{(2)}] = 28n - 66; \quad [\Delta^{(2)}] = 12(n-2)(7n-19); \qquad {\scriptstyle (n>3)}$$

$$[\Delta_g^{(2)} D] = 6(14n^3 - 61n^2 - 48n + 293); \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta_g^{(2)} E] = 12(28n^3 - 150n^2 - 7n + 594); \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta^{(2)} D] = 12(21n^4 - 141n^3 + 109n^2 + 814n - 1308); \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta^{(2)} E] = 144(7n^4 - 54n^3 + 64n^2 + 304n - 583). \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta_0^{(3)}] = 3; \quad [\Delta_g^{(3)}] = 3(8n - 21); \quad [\Delta^{(3)}] = 21(n-3)(4n-9); \qquad {\scriptstyle (n>3)}$$

$$[\Delta^{(3)} D] = 9(n-4)(28n^3 - 91n^2 - 177n + 567); \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

$$[\Delta^{(3)} E] = 36(28n^4 - 231n^3 + 326n^2 + 1281n - 2756). \qquad {\scriptstyle (n>4)}$$

---

§ 3.

Curven mit zwei Puncten gegebener Vielfachheit.

1. Es sollen jetzt Systeme untersucht werden, deren allgemeine Curve nur zwei singuläre Puncte, aber von beliebiger Vielfachheit, besitzt. Ein τ-facher Punct wird mit

$$P^{\tau}$$

bezeichnet, während die Indices g, 0 die frühere Bedeutung haben. In

$$\overline{PP_1}$$

soll der Strich die Bedingung andeuten, dass die Verbindungsgerade von P, P_1 durch einen gegebenen Punct gehe. Die hinzuzudenkenden elementaren Bedingungen beziehen sich wieder auf gegebene Puncte.

Da in einem System von Curven, welche einen τ_1-fachen Punct X_1 und einen τ-fachen Punct X besitzen sollen, keine vorkommen, bei welchen letzterer in einen $(\tau + 1)$-fachen Punct überginge, so kann man auch *nicht unmittelbar* eine Beziehung zwischen den Zahlen

$$[P^{\tau_1}P^{\tau}], \qquad [P^{\tau_1}P^{\tau+1}]$$

erhalten. Die Herstellung einer solchen gelingt aber durch Einführung von *Zwischensystemen*, in welchen auch die Tangenten des Punctes X gewissen Bedingungen unterworfen sind; und zwar soll die hinzutretende Forderung, in Zeichen

$$(\sigma t)_p,$$

die sein, dass σ Tangenten des τ-fachen Punctes zusammenfallen und ausserdem durch einen gegebenen Punct M gehen. Das so definirte System, für welches

$$\mu = f(\sigma)$$

gesetzt werden möge, enthält $f(\sigma + 1)$ besondere Curven, deren Anzahl durch $f(\sigma)$ und die übrigen Zahlen des Systems ausdrückbar ist. Es soll im Folgenden immer

$$\tau_1 \geq \tau, \qquad \text{und vorläufig} \qquad \sigma < \tau$$

vorausgesetzt, und mit (X_1), (X) bezeichnet werden, wie viele Systemscurven ihren τ_1-fachen, bzw. τ-fachen Punct in einer gegebenen Geraden haben. V bedeutet die Vielfachheit des X-Ortes in M, oder, was dasselbe ist, die Zahl derjenigen Systemscurven, welche ihren τ-fachen Punct in M haben.

Die Geraden, welche einen von M verschiedenen festen Punct Q mit den Puncten X verbinden, schneiden die betreffende Curve noch in je $n - \tau$ Puncten Y, deren Ort die Ordnung

$$\mu + (n - \tau)(X)$$

hat. Dieses ist zugleich die volle Zahl der Coincidenzen von Y mit X. Die letzteren entstehen, wenn QX eine von den σ bevorzugten verschiedene Tangente von X ist; ferner dadurch, dass X in der Geraden MQ, aber nicht in M selbst liegt, und zwar zählt jede dieser Coincidenzen σ-fach; endlich dadurch, dass die beiden singulären Puncte zusammenfallen, was im Ganzen C mal vorkommen möge.

Die Zahl C setzt sich aus zwei anderen zusammen, zwischen welchen eine Unterscheidung erforderlich ist. Es kann ein Zusammenfallen von X mit X_1 in der Weise eintreten, als wäre die σ-fache Systemsbedingung $(\sigma t)_p$ durch die $(\sigma - 1)$-fache

$$(\sigma t)$$

ersetzt, welche nur verlangt, dass σ Tangenten von X zusammenfallen, dafür aber die andere hinzugefügt, dass die Gerade $X_1 X$ durch den Punct M gehen soll. Solche Coincidenzen, deren Zahl C' sei, will ich *regelmässige* nennen; jede derselben giebt Anlass zu einer $(\tau_1 - \tau)$-fach zählenden Coincidenz von Y mit X. Für die nicht regelmässigen Coincidenzen von X_1 mit X aber gilt, wie nachgewiesen werden soll, der Coefficient

$$\tau_1 - \tau + \sigma.$$

Dieses vorläufig als richtig vorausgesetzt, erhält man für den Grad des von den $\tau - \sigma$ weiteren Tangenten des τ-fachen Punctes beschriebenen Linienortes

$$(1) \qquad \mu + (n - \tau - \sigma)(X) + \sigma . V - (\tau_1 - \tau + \sigma)C + \sigma . C';$$

so oft geht daher auch eine jener Tangenten durch den Punct M selbst. Da nun diese letztere specielle Bedingung $\tau - \sigma$ mal dadurch erfüllt wird, dass X in M liegt, und ebenso oft dadurch, dass eine regelmässige Coincidenz von X mit X_1 eintritt, so ergiebt sich die Gleichung

$$(2) \qquad f(\sigma + 1) - f(\sigma)$$
$$= (n - \tau - \sigma)(X) - (\tau_1 - \tau + \sigma)C + (2\sigma - \tau)(V + C'),$$

oder, wenn man noch

$$C = (X) + (X_1) - (\overline{XX_1})$$

mit Hülfe des Correspondenzprincips ausdrückt, und nach σ summirt:

$$(3) \qquad f(\sigma) - f(0)$$
$$= \sum_0^{\sigma-1} \{(n - \tau_1 - 2\sigma)(X) - (\tau_1 - \tau + \sigma)[(X_1) - (\overline{XX_1})] + (2\sigma - \tau)(V + C')\}.$$

2. Für ein System, welches sich von dem bisher betrachteten nur dadurch unterscheidet, dass die Bedingung (σt) an die Stelle von $(\sigma t)_p$ tritt, sei

$$\mu = \varphi(\sigma),$$

während (X), (X_1), C in Beziehung auf das neue System ihre frühere Bedeutung behalten. Da es $f(\sigma)$ Curven im System giebt, welche die singuläre Tangente des τ-fachen Punctes durch einen gegebenen Punct schicken, so findet man für den Grad des von den $\tau - \sigma$ weiteren Tangenten gebildeten Linienortes:

$$\mu + (n - \tau)(X) - (\tau_1 - \tau)C - \sigma f(\sigma).$$

Bestimmt man daher mit Hülfe des Correspondenzprincips, wie oft eine dieser Tangenten mit der singulären coincidirt, ohne dass X mit X_1 zusammenfällt, so ergiebt sich die Formel

$$\varphi(\sigma + 1) - \varphi(\sigma) = (\tau - 2\sigma)f(\sigma) + (n - 2\tau + \sigma)(X) - (\tau_1 - \sigma)C,$$

oder

$$(4)\qquad \varphi(\sigma)$$

$$= \sum_{1}^{\sigma-1} \{(\tau - 2\sigma)f(\sigma) + (n - \tau_1 - 2\tau + 2\sigma)(X) - (\tau_1 - \sigma)[(X_1) - (\overline{XX_1})]\},$$

von welcher zur Bestimmung von V und C' Gebrauch gemacht werden soll.

3. Bei der Herleitung von (2) wurde zwar $\sigma < \tau$ vorausgesetzt; es ist aber leicht zu erkennen, dass jene Formel auch für $\sigma = \tau$ in gewissem Sinne noch richtig bleibt. Der Ausdruck (1) verliert dann seine frühere Bedeutung, er giebt vielmehr an, wie viele Curven des Systems den τ-fachen Punct in einen $(\tau + 1)$-fachen übergehen lassen; diese Curven sind von der Lage des Punctes M ganz unabhängig, und alle Tangentenbedingungen fallen für dieselben weg. Die Gleichung (2) gilt also noch für $\sigma = \tau$, und (3) für $\sigma = \tau + 1$, sobald man nur unter $f(\tau + 1)$ diejenige Zahl versteht, in welche $f(0)$ übergeht, wenn τ durch $\tau + 1$ ersetzt wird. — Die rechte Seite von (4) dagegen verschwindet sowohl für $\sigma = \tau + 1$ als für $\sigma = 0$.

Durch successive Anwendung der Formel (3) gelingt es,

$$[P^{\tau_1} P^{\tau}]$$

zu bestimmen. Vorher aber müssen andere Zahlen berechnet werden, welche sich auf die Bedingungen beziehen, dass mindestens einer der singulären Puncte nicht frei ist, sondern entweder gegeben ist, oder in einer gegebenen Geraden liegt. Dabei wird sich zugleich die Richtigkeit des zur Herleitung der Gleichung (2) benutzten Coefficienten $\tau_1 - \tau + \sigma$ ergeben. Als bekannt werden vorausgesetzt die auf *einen* singulären Punct bezüglichen Zahlen

$$[P^{\tau_1}] = \frac{1}{8}\tau_1(\tau_1^2 - 1)(\tau_1 + 2)(n - \tau_1 + 1)^2,$$

$$[P_g^{\tau_1}] = \frac{1}{2}\tau_1(\tau_1 + 1)(n - \tau_1 + 1),$$

und zur Vereinfachung der im Folgenden zu entwickelnden Ausdrücke sollen die links stehenden Zeichen als Abkürzungen beibehalten werden.

4. Sei zunächst

$$f(\sigma) = [P_{0g}^{\tau}(\sigma t)_p P_g^{\tau_1}],$$

wo der Doppelindex $0g$ ausdrücken soll, dass der gegebene Punct in der Geraden g liegt. Man hat dann

$$(X) = 0, \qquad (X_1) = C = 1, \qquad C' = V = 0.$$

Die Zahl $f(\sigma)$, die für den Augenblick mit

$$F(n, \tau_1, \tau, \sigma)$$

bezeichnet werden möge, lässt sich, ohne Anwendung des Correspondenzprincips, direct durch die Annahme herleiten, dass $n - \tau_1 - \tau + 1$ der gegebenen Puncte in g liegen. So findet man

$$F(n, \tau_1, \tau, \sigma) = \tau_1(n - \tau_1 - \tau + 1) + F(n-1, \tau_1 - 1, \tau - 1, \sigma),$$

wenn $\sigma < \tau$,

$$F(n, \tau_1, \tau, \tau) = \tau_1(n - \tau_1 - \tau + 1) + F(n-1, \tau_1 - 1, \tau, 0),$$

und hieraus

$$(5) \qquad [P_{0g}^{\tau}(\sigma t)_p P_g^{\tau_1}]$$

$$= [P_g^{\tau_1}] - \frac{1}{6}\tau(\tau+1)(3\tau_1 - \tau + 1) - \sigma\left(\tau_1 - \tau + \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\right).$$

Weiter folgt jetzt

$$f(\sigma+1) - f(\sigma) = -(\tau_1 - \tau + \sigma),$$

d. h. dasselbe, was die Gleichung (2) ergeben haben würde. Hiermit ist der fragliche Coefficient verificirt; man hätte umgekehrt aus (3), wenn $\sigma = \tau + 1$ gesetzt wird, zunächst die Differenz

$$F(n, \tau_1, \tau+1, 0) - F(n, \tau_1, \tau, 0),$$

sodann

$$F(n, \tau_1, \tau, 0) = [P_{0g}^{\tau} P_g^{\tau_1}] = [P_g^{\tau_1}] - \frac{1}{6}\tau(\tau+1)(3\tau_1 - \tau + 1),$$

endlich den Ausdruck (5) herleiten können.

Auch die Gleichung

$$(5_a)\qquad [P_{0g}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p] = \frac{1}{6}\tau(\tau+1)(3n-3\tau_1-2\tau+2)+\sigma(n-\tau_1-\sigma+1)$$

lässt, wie (5), und die später zu entwickelnde (7), eine doppelte Herleitung zu. — Aus (5), (5_a) folgt mit Hülfe von (4)

$$(6)\qquad [P_{0g}^{\tau}(\sigma t) P_g^{\tau_1}] = \sigma(\tau+1-\sigma)\{[P_{0g}^{\tau} P_g^{\tau_1}] - (\tau_1 - \frac{1}{2}\tau)(\sigma-1)\}$$

$$(6_a)\qquad [P_{0g}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)] = \sigma(\tau+1-\sigma)\{[P_{0g}^{\tau_1} P_g^{\tau}] + (n-\tau-\tau_1)(\sigma-1)\}.$$

Liegen beide singulären Puncte in einer und derselben gegebenen Geraden, und ist keiner derselben fest, so hat man zu setzen:

$$f(\sigma) = [P_g^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p];$$

für (X), (X_1) sind die Ausdrücke (5), (5_a) zu benutzen, während $(\overline{XX_1}) = C' = V' = 0$ ist. Dies giebt

$$(7)\qquad [P_g^{\tau} P_g^{\tau_1}] = \frac{1}{6}\tau(\tau+1)(3n-3\tau_1-2\tau+2)[P_g^{\tau_1}]$$

$$-\frac{1}{36}\tau(\tau^2-1)(\tau+2)[9\tau_1(n-\tau_1)-3(\tau-1)(n+\tau_1)+2\tau^2-4\tau+3].$$

Liegen aber die singulären Puncte in verschiedenen Geraden, d. h. ist

$$f(\sigma) = [P_{g_1}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p],$$

dann hat man in (2) zu setzen

$$(X) = [P_g^{\tau_1}],\quad C = (X) - [P_{0g}^{\tau}(\sigma t)_p P_g^{\tau_1}],\quad V = 0,\quad C' = \sigma(\tau-\sigma+1),$$

und findet

$$(8)\qquad [P_g^{\tau} P_{g_1}^{\tau_1}]$$

$$= [P_g^{\tau}][P_g^{\tau_1}] - \frac{1}{72}\tau(\tau^2-1)(\tau+2)[9\tau_1^2 - 6(\tau-1)\tau_1 + (\tau-3)(\tau+1)].$$

5. Wegen ihrer complicirten Gestalt sollen die aus (3) hervorgehenden Ausdrücke $f(\sigma)$ mit den vier Argumenten n, τ, τ_1, σ, obgleich sie

zur Herleitung der nachstehenden Resultate gebraucht werden, nicht vollständig angegeben werden, sondern nur ihre von σ unabhängigen Anfangsglieder $f(0)$. Die Berechnung der letzteren geschieht immer in der Weise, dass zuerst in (3) die Summirung von $\sigma = 0$ bis $\sigma = \tau$ ausgeführt, und sodann nach τ summirt wird.

Für

$$f(\sigma) = [P_0^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p]$$

hat man auf der rechten Seite von (3) zu setzen:

$$(X_1) = 0, \qquad (X) = [P_g^{\tau}(\sigma t)_p] = [P_g^{\tau}] + \sigma\left(n - \tau - \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\right),$$

$$C' = V = \sigma(\tau - \sigma + 1), \qquad (\overline{XX}_1) = [P_{0g}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p].$$

So folgt die erste der beiden Gleichungen

$$(9) \qquad [P_0^{\tau_1} P^{\tau}]$$

$$= [P^{\tau}] - \frac{1}{72}\tau(\tau^2 - 1)(\tau + 2)[9\tau_1^2 - 6(\tau - 1)\tau_1 + (\tau - 3)(\tau + 1)],$$

$$(9a) \qquad [P_0^{\tau} P^{\tau_1}]$$

$$= [P^{\tau_1}] - \frac{1}{72}\tau(\tau^2 - 1)(\tau + 2)[9\tau_1^2 - 6(\tau - 1)\tau_1 + (\tau - 3)(\tau + 1)],$$

deren zweite in derselben Weise aus

$$f(\sigma) = [P_0^{\tau}(\sigma t)_p P^{\tau_1}], \qquad (X) = 0, \qquad (X_1) = [P_g^{\tau_1}], \qquad V = 0,$$

$$C' = \sigma(\tau - \sigma + 1), \qquad (\overline{XX}_1) = [P_{0g}^{\tau}(\sigma t)_p P_g^{\tau_1}]$$

hervorgeht. Nach vollständiger Entwicklung von $f(\sigma)$ findet man

$$\varphi(\sigma) = [P_0^{\tau}(\sigma t) P^{\tau_1}]$$

aus der Formel (4), auf deren rechter Seite $(X_1) = \sigma(\tau - \sigma + 1)[P_g^{\tau_1}]$, und für $(\overline{XX}_1)$ der Ausdruck (6) zu setzen ist.

Die bisher gewonnenen Resultate ermöglichen die Berechnung von

$$f(\sigma) = [\overline{P^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p}],$$

da die folgenden, auf der rechten Seite von (3) zu benutzenden Zahlen bereits sämmtlich bekannt sind:

$$(X) = [P_g^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p] + [P_0^{\tau}(\sigma t)_p P^{\tau_1}],$$

$$(X_1) = [P_g^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p] + [P^{\tau}(\sigma t)_p P_0^{\tau_1}],$$

$$C' = [P_{0g}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)] + [P_{0g}^{\tau}(\sigma t) P_g^{\tau_1}],$$

$$(\overline{XX_1}) = [P_g^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p], \qquad V = [P_{0g}^{\tau}(\sigma t) P_g^{\tau_1}].$$

Insbesondere ergiebt sich

$$(10) \qquad [\overline{\dot{P}^{\tau} P^{\tau_1}}] = \frac{1}{6}\tau(\tau+1)[3(n-\tau_1)-2(\tau-1)][P^{\tau_1}]$$
$$+ \frac{1}{72}\tau(\tau^2-1)(\tau+2)[9(n^2+\tau_1^2)-18n\tau_1-12(\tau-1)(n-\tau_1)$$
$$+2(2\tau^2-4\tau+3)][P_g^{\tau_1}]$$
$$+\frac{1}{144}\tau(\tau^2-1)(\tau+2)(\tau^2+\tau-4)[-9n\tau_1(n-\tau_1)$$
$$+3(\tau-1)(n^2+4n\tau_1-3\tau_1^2)-(5\tau^2-10\tau+3)n-3(\tau^2-2\tau+3)\tau_1]$$
$$+\frac{1}{360}\tau(\tau^2-1)(\tau^2-4)(5\tau^4-20\tau^2+30\tau-9).$$

Der Annahme entsprechend, dass einer der beiden singulären Puncte in einer Geraden liegt, der andere frei ist, hat man

$$f(\sigma) = [P_g^{\tau}(\sigma t)_p P^{\tau_1}], \quad \text{resp.} \quad = [P_g^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p].$$

Im ersten Falle ist

$$(X) = [P_0^{\tau}(\sigma t)_p P^{\tau_1}], \qquad V = 0,$$

$$C = [P_g^{\tau}(\sigma t)_p P_{g_1}^{\tau_1}] - [P_g^{\tau}(\sigma t)_p P_g^{\tau_1}], \qquad C' = [P_{0g}^{\tau}(\sigma t) P_g^{\tau_1}] + [P_g^{\tau}(\sigma t)],$$

wo

$$[P_g^{\tau}(\sigma t)] = \frac{1}{2}\sigma(\sigma+1-\tau)[(2n-3\tau)\sigma+(\tau-1)(\tau+2)n-\tau^3+4\tau];$$

im zweiten Falle behält C denselben Werth, dagegen ist

$$(X) = [P_{g_1}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p], \qquad V = \sigma(\tau - \sigma + 1)[P_g^{\tau_1}], \qquad C' = [P_{0g}^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)] + V.$$

Hiernach wird

$$(11) \qquad [P_g^{\tau} P^{\tau_1}] = \frac{\tau(\tau+1)}{2}(n - \tau + 1)[P^{\tau_1}]$$

$$- \frac{1}{72}\tau(\tau^2 - 1)(\tau + 2)[9\tau_1^2 - 6(\tau - 1)\tau_1 + (\tau - 3)(\tau + 1)][P_g^{\tau_1}]$$

$$- \frac{1}{144}\tau(\tau^2 - 1)(\tau + 2)(\tau^2 + \tau - 4)[9\tau_1^2(n - \tau_1) - 6(\tau - 1)n\tau_1 + (\tau - 3)(\tau + 1)n + 3(\tau^2 - 2\tau + 3)\tau_1]$$

$$+ \frac{1}{1080}\tau(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 4)(5\tau^4 - 35\tau^2 + 18).$$

$$(11\text{a}) \qquad \frac{1}{\tau(\tau^2 - 1)(\tau + 2)}[P_g^{\tau_1} P^{\tau}]$$

$$= \frac{1}{72}[9(n - \tau + 1)^2 - 9\tau_1^2 + 6(\tau - 1)\tau_1 - (\tau - 3)(\tau + 1)][P_g^{\tau_1}]$$

$$- \frac{1}{144}(\tau^2 + \tau - 4)[9\tau_1^2(n - \tau_1) - 6(\tau - 1)n\tau_1 + (\tau - 3)(\tau + 1)n + 3(\tau^2 - 2\tau + 3)\tau_1]$$

$$+ \frac{1}{1080}(\tau - 2)(5\tau^4 - 35\tau^2 + 18).$$

Sind endlich beide singulären Puncte frei, ist also

$$f(\sigma) = [P^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p],$$

dann hat man folgende Zahlen in (3) zu benutzen:

$$(X) = [P^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p], \qquad (X_1) = [P_g^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p], \qquad (\overline{XX_1}) = [\overline{P^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p}],$$

$$V = [P_0^{\tau}(\sigma t) P^{\tau_1}], \qquad C' = [P_g^{\tau_1} P_g^{\tau}(\sigma t)_p] + [P_0^{\tau_1} P^{\tau}(\sigma t)_p] + [P_0^{\tau}(\sigma t)_p P^{\tau_1}],$$

und findet

$$(12)\qquad \frac{1}{\tau(\tau^2-1)(\tau+2)}[P^\tau P^{\tau_1}]$$

$$=\frac{1}{72}[(n-\tau+1)^2-9\tau_1^2+6(\tau-1)\tau_1-(\tau-3)(\tau+1)][P^{\tau_1}]$$

$$-\frac{1}{144}(\tau^2+\tau-4)[9\tau_1^2(n-\tau_1)-6(\tau-1)n\tau_1+(\tau-3)(\tau+1)n$$
$$+3(\tau^2-2\tau+3)\tau_1][P_g^{\tau_1}]$$

$$+\frac{1}{1080}(\tau-2)(5\tau^4-35\tau^2+18)[P_g^{\tau_1}]$$

$$-\frac{1}{576}(\tau-2)(\tau+3)(\tau^2+\tau-4)[9\tau_1^2(n-\tau_1)^2-6(\tau-1)\tau_1^2(n-\tau_1)$$
$$+(\tau-3)(\tau+1)n^2+3(\tau^2-2\tau+3)\tau_1(2n-\tau_1)]$$

$$+\frac{1}{2160}(\tau-2)^2(\tau+3)[(5\tau^4-35\tau^2+18)n+(5\tau^4+10\tau^2+90\tau-63)\tau_1]$$

$$-\frac{1}{12960}(\tau-2)(\tau+3)(10\tau^6-30\tau^5-35\tau^4+195\tau^3-218\tau^2+24\tau+108).$$

Eine Controlle dieser Formel erhält man für $n=\tau_1+\tau-1$; in diesem Falle bestehen die fraglichen Curven aus einer C_{n-1} mit einem (τ_1-1)-fachen und einem $(\tau-1)$-fachen Puncte, und aus einer die beiden singulären Puncte verbindenden Geraden, welche 0, 1 oder 2 der gegebenen Puncte enthalten kann. Hiernach ist

$$[P^\tau P^{\tau_1}]_{n=\tau+\tau_1-1}-[P^{\tau-1}P^{\tau_1-1}]_{n=\tau+\tau_1-2}$$

$$=(\tau\tau_1+3)[\overline{P^{\tau-1}P^{\tau_1-1}}]_{n=\tau+\tau_1-2}+\frac{(\tau\tau_1+3)(\tau\tau_1+2)}{2}[P_g^{\tau-1}P_g^{\tau_1-1}]_{n=\tau+\tau_1-2},$$

wie man mit Hülfe von (10) und (7) bestätigt.

Für das System

$$(P^{\tau}P^{\tau_1})$$

sind jetzt, dem Entwickelten zufolge, die Zahlen μ, B, B_1, ξ bekannt, deren Bezeichnung der in § 1 für dreifache Puncte gewählten analog ist. Weiter findet man z. B.

$$2(n-1)\mu = \mu' + \tau(\tau-1)B + \tau_1(\tau_1-1)B_1;$$

$$T = (n-\tau)B + \mu - (\tau_1-\tau)(B + B_1 - \xi);$$

$$T_1 = (n-\tau_1)B_1 + \mu;$$

$$(2t) = (\tau-1)(2T - \tau B) - \tau(\tau-1)(B + B_1 - \xi);$$

$$(2t)_1 = (\tau_1-1)(2T_1 - \tau_1 B_1) - \tau(\tau-1)(B + B_1 - \xi);$$

$$\alpha = (n-2)\mu' + (n+n'-1)\mu - (\tau-1)T - (\tau_1-1)T_1 - \tau(2t) - \tau_1(2t)_1.$$

Man könnte ferner einen Doppelpunct mit in das System aufnehmen, und von diesem allmälig zu einem dritten Puncte höherer Vielfachheit übergehen; was hier nicht weiter verfolgt werden soll.

B. Plancurven in nicht fester Ebene.

§ 4.

Zahlen für punctallgemeine Curven.

1. In Bezug auf punctallgemeine Plancurven im Raum bieten sich die folgenden fundamentalen Aufgaben: Bestimmung der Zahl solcher Curven, welche 1) ihre Ebene durch eine feste Axe schicken und $\frac{n(n+3)}{2} + 1$ gegebene gerade Linien treffen; 2) ihre Ebene durch einen gegebenen Punct schicken, und $\frac{n(n+3)}{2} + 2$ gerade Linien treffen;

3) $\frac{n(n+3)}{2}+3$ gerade Linien treffen. Diese Zahlen sollen mit $F(n)$, $\Phi(n)$, $\Psi(n)$ bezeichnet, und es soll bewiesen werden, dass

$$(1)\quad F(n)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$$(2)\quad \Phi(n)=\frac{1}{36}n(n+1)(n+2)(2n^3+6n^2+7n-3),$$

$$(3)\quad \Psi(n)=\frac{1}{324}n(n^2-1)(n+2)(2n^5+14n^4+49n^3+91n^2+90n+18)$$

ist.

Der ersten Aufgabe genügen auch dann nur endlich viele Curven, wenn $n+1$ der Geraden die Axe A schneiden. Jede solche specielle Gerade bestimmt mit A eine Ebene, in welcher eine auch die übrigen Geraden treffende Curve liegt; die eine Gerade aber wird n mal getroffen, so dass auf diese Weise $n(n+1)$ Lösungen erhalten werden. Die ausserdem existirenden, den Bedingungen genügenden Curven zerfallen nothwendig in A und je eine C_{n-1}, welche die

$$\frac{n(n+3)}{2}+1-(n+1)=\frac{(n-1)(n+2)}{2}+1$$

die Axe nicht schneidenden Geraden trifft. Es ist also

$$F(n)=n(n+1)+F(n-1),$$

und hieraus folgt der Ausdruck (1).

Eine leichte Verallgemeinerung erhält man durch Hinzufügung der Bedingung, dass die Curve durch k auf der Axe gegebene Puncte gehen soll, und dem entsprechend k gerade Linien weniger gegeben sind. In diesem Falle genügt es, $n+1-k$ dieser letzteren die Axe schneiden zu lassen, und man findet

$$(1a)\qquad F(n,k)=n(n+1-k)+F(n-1)=F(n)-kn.$$

Dieser Ausdruck gilt auch noch, wenn die k Puncte zum Theil oder alle einander unendlich nahe liegen.

2. Zu einer Differenzengleichung für $\Phi(n)$ gelangt man zwar auf einfachem Wege durch die Annahme, dass $n + 1$ der gegebenen Geraden in einer Ebene liegen. Es soll aber eine andere Herleitung gezeigt werden, weil die sich ergebenden Nebenresultate für die Lösung der dritten Aufgabe zu benutzen sind.

Der Kürze wegen möge eine in k consecutiven Puncten schneidende Tangente eine T_k, ihr Berührungspunct ein T_k-Punct genannt werden. Man beweist:

Erstens. In fester Ebene giebt es $\frac{k(k-1)}{2}$ Curven n^{ter} Ordnung, welche an gegebener Stelle einen T_k-Punct haben, und durch $\frac{n(n+3)}{2} - k + 1$ andere feste Puncte gehen. — Denn soll z. B. der T_k-Punct in $x = 0$, $y = 0$ liegen, so hat man als allgemeinste Gleichungsform

$$(x + \lambda y)A + B = 0,$$

wo das Polynom A den $(k-2)^{\text{ten}}$ Grad in x, y erreicht, während in B nur Glieder von höherer als der $(k-1)^{\text{ten}}$ Ordnung vorkommen. Durch Einsetzen der Coordinaten der gegebenen Puncte erhält man so viele Gleichungen, wie in A und B homogene Coefficienten enthalten sind, und die Elimination der letzteren giebt eine Gleichung für λ, deren Grad gleich der Zahl der Coefficienten in A ist.

Zweitens. Für die Schaar von Curven, welche durch $\frac{n(n+3)}{2} - k + 1$ gegebene Puncte gehen, und in einer gegebenen Geraden G einen T_k-Punct haben, ist der Grad des Linienortes der zugehörigen T_k

$$(T_k) = 2n - 1 + \frac{1}{2}(k-2)(2n - k - 1).$$

Verbindet man nämlich einen Punct der Ebene mit den Puncten ξ von G durch eine Gerade, und construirt die C_n, welche durch die gegebenen Puncte geht, und ξ zum T_{k-1}-Punct, jene Verbindungsgerade zur T_{k-1} hat, dann trifft letztere die jedesmalige Curve noch an $n - k + 1$ Stellen, welche einen Ort der Ordnung

$$n - k + 1 + (T_{k-1})$$

bilden. Diese Zahl muss mit (T_k) übereinstimmen.

Drittens. Die Zahl der C_n in fester Ebene, welche durch $\frac{n(n+3)}{2} - k + 2$ gegebene Puncte gehen, und in einer Geraden G einen T_k-Punct haben, ist

$$(4) \qquad \varphi(n, k) = \frac{1}{8} k(k-1)[4(k-1)n - (k-2)(3k-1)].$$

Für jeden Punct X von G construire man die $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ Curven, welche X zum T_{k-1}-Punct haben, und durch die gegebenen Puncte gehen. Die zugehörige T_{k-1} bestimmt $n-k+1$ Puncte Y auf jeder Curve, und wenn einer derselben mit X zusammenfällt, hat man einen T_k-Punct. Um die Ordnung des Y-Ortes zu bestimmen, betrachte man auf einer zweiten Geraden G', die G in M treffen möge, eine Correspondenz zwischen Puncten Z der veränderlichen Curve, und Puncten Z' der zugehörigen T_{k-1}. Jeder von M verschiedene Coincidenzpunct liefert einen in G' liegenden Punct Y, daher ist die Ordnung des Y-Ortes:

$$(Y) = \varphi(n, k-1) + n(T_{k-1}) - \frac{(k-1)(k-2)}{2}(k-1),$$

wo das dritte Glied angiebt, wie viele in M liegende unbrauchbare Coincidenzen in Abzug zu bringen sind. Weiter ist die Zahl der T_k-Puncte auf G

$$\varphi(n, k) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}(n-k+1) + (Y) - (n-k+1)(T_{k-1}),$$

und man findet hieraus zur Bestimmung von $\varphi(n, k)$ die Gleichung

$$\varphi(n, k) - \varphi(n, k-1) = \frac{1}{2}(k-1)[(3k-4)n - 3(k-1)(k-2)],$$

aus welcher (4) hervorgeht.

3. Schon der erste dieser Hülfssätze genügt zur Bestimmung von $\Phi(n)$. Anstatt direct auf die letztere auszugehen, kann man folgende Fassung der Aufgabe zu Grunde legen: Die Zahl $\Phi_1(n)$ der Curven zu bestimmen, welche *durch einen gegebenen Punct Q* gehen, und $\frac{n(n+3)}{2} + 1$

gegebene gerade Linien treffen. $\Phi_1(n)$ hängt mit $\Phi(n)$ zusammen durch die Gleichung

$$\Phi(n) = \Phi_1(n) + nF(n), \tag{5}$$

wie man sogleich erkennt, wenn eine der Geraden der ursprünglichen Aufgabe durch den gegebenen Punct gelegt wird.

Allgemeiner bedeute nun

$$\Phi_1(n, k)$$

die Zahl der Plancurven, welche in dem festen Puncte Q eine Berührung $(k - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer gegebenen, durch Q gelegten Ebene E haben, und

$$\frac{n(n+3)}{2} - k + 2$$

gerade Linien treffen; oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Ordnung der Fläche, welche, bei Weglassung einer Geraden-Bedingung, von den ∞^1 die übrigen Bedingungen erfüllenden Curven erzeugt wird.

Der Schnitt der Ebene E mit der Fläche besteht aus den $\frac{k(k-1)}{2}$ Systemscurven, welche ganz in E liegen, und einer Restcurve, die $\Phi_1(n, k+1)$ Zweige durch Q schickt. Da es nun $F(n, k)$ Curven im System giebt, welche die singuläre Tangente, die sie in Q besitzen sollen, mit einer gegebenen, durch Q gehenden und in E liegenden Geraden A zusammenfallen lassen, und jede dieser Curven die Gerade A in $n - k$ von Q verschiedenen Puncten trifft, so ist die Ordnung der Restcurve

$$\Phi_1(n, k+1) + (n-k)F(n, k);$$

mit Rücksicht auf (1_a) findet man also

$$\Phi_1(n, k) = \frac{k(k-1)}{2} n + (n-k)[F(n) - kn] + \Phi_1(n, k+1). \tag{6}$$

Auch für $k = n$ darf man diese Gleichung in Anspruch nehmen, hat aber dann zu untersuchen, was aus dem letzten Gliede der rechten Seite wird. Da eine C_n mit einer T_{n+1} diese letztere ganz enthält, handelt es sich

jetzt nur um zerfallende Curven. Die Restcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung trifft entweder die

$$\frac{n(n+3)}{2} - n + 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$$

gegebenen Geraden, und schickt ihre Ebene durch Q; oder sie trifft nur $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1$ jener Geraden, und schickt ihre Ebene durch eine in E liegende, durch Q gehende Axe, welche durch die Bedingung, die noch nicht benutzte Gerade zu treffen, jedesmal vollkommen bestimmt ist.

Als Ergänzung der Gleichungen (6) hat man daher die folgende:

$$\Phi_1(n, n) = \frac{n(n-1)}{2}n + \Phi(n-1) + \frac{n^2+n+2}{2}F(n-1),$$

mit deren Hülfe sich aus der Addition der Gleichungen (6) zunächst

$$\Phi_1(n) = \Phi(n-1) + \frac{n^2+n+2}{2}F(n-1)$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=n}\left\{\frac{k(k-1)}{2}n + (n-k)[F(n) - kn]\right\},$$

und sodann, durch Ausrechnen der Summe, und mit Benutzung der Gleichungen (1) und (5)

$$\Phi(n) - \Phi(n-1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n^3 + 3n^2 + 3n - 2)$$

ergiebt. Hiermit ist die Richtigkeit der Gleichung (2) bewiesen.

4. Bevor zum Beweise der Gleichung (3) geschritten wird, soll noch die Zahl

$$f(n, k)$$

derjenigen Plancurven bestimmt werden, welche ihre Ebene durch eine gegebene Axe A schicken, mit dieser Axe an nicht gegebener Stelle eine Berührung $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung haben, und

$$\frac{n(n+3)}{2} - k + 2$$

gerade Linien treffen. Bezieht sich in

$$f(n,\ k,\ h)$$

das dritte Argument h auf die Bedingung, dass die Curve durch h gegebene Puncte von A gehe, während der T_k-Punct anderswo liegen soll, dann besteht auf A folgende Correspondenz: Zu einem gegebenen T_{k-1}-Punct gehören

$$(n - k - h + 1)F(n,\ k + h - 1)$$

weitere bewegliche Schnittpuncte; zu einem der letzteren gehören

$$f(n,\ k - 1,\ h + 1)$$

Puncte T_{k-1}. Daher ist, für $k > 2$

$$f(n,\ k,\ h) = f(n,\ k - 1,\ h + 1) + (n - k - h + 1)[F(n) - n(k + h - 1)],$$

und insbesondere

$$f(n,\ 2,\ h) = 2(n - h - 1)[F(n) - (h + 1)n].$$

Hieraus findet man leicht

$$(7) \qquad f(n,\ k,\ 0) = f(n,\ k) = k(n + 1 - k)[F(n) + n - kn].$$

5. Man verstehe unter

$$\Psi(n,\ k)$$

die Ordnung der Fläche, welche erzeugt wird von den Plancurven, die eine T_k in einer gegebenen Ebene E, den zugehörigen T_k-Punct auf einer in E liegenden Geraden G haben, und

$$\frac{n(n + 3)}{2} - k + 2$$

(ausser G) gegebene gerade Linien treffen. Für $k = 1$ kommt man auf $\Psi(n)$ zurück.

Zu einem anderen Ausdruck für $\Psi(n, k)$ gelangt man am einfachsten durch Untersuchung *des Schnittes der Fläche mit der Ebene E selbst.*

Die Gerade G zählt in diesem Schnitt $k \,.\, \Phi_1(n,\ k)$-fach. Ganz in E liegen $\varphi(n,\ k)$ Curven des Systems, deren Zahl aus (4) bekannt ist.

Ausserdem ist noch eine Restcurve vorhanden, von welcher wir nur die Schnittpuncte mit G zu kennen brauchen; es sind dieses erstens die $\Psi(n, k+1)$ Stellen von G, in welchen eine Systemscurve eine Berührung höherer Ordnung mit E hat, zweitens die $(n-k)f(n, k)$ Puncte, in welchen die $f(n, k)$ Curven, deren singuläre Tangente G ist, diese Gerade noch treffen. Demnach hat man

$$(8) \quad \Psi(n, k) = k\Phi_1(n, k) + n\varphi(n, k) + \Psi(n, k+1) + (n-k)f(n, k).$$

Einen Ausdruck für $\Phi_1(n, k)$ findet man aus (6):

$$\Phi_1(n, k) = \Phi(n) - \frac{1}{6}k(2n^4 + 7n^3 + 10n^2 + 5n)$$

$$+ \frac{1}{6}k^2(n^3 + 6n^2 + 8n) - \frac{1}{2}k^3 n;$$

hiernach giebt die vorige Gleichung, mit Benutzung von (4) und (7)

$$(9) \qquad \Psi(n, k) - \Psi(n, k+1)$$

$$= \frac{1}{36}k(2n^6 + 24n^5 + 77n^4 + 126n^3 + 83n^2 + 3n)$$

$$- \frac{1}{8}k^2(8n^4 + 36n^3 + 64n^2 + 29n) + \frac{1}{4}k^3(2n^3 + 18n^2 + 21n) - \frac{15}{8}k^4 n.$$

Für $k = n$ kommt man auf den Ausdruck $\Psi(n, n+1)$ der sich nur auf zerfallende Curven beziehen kann. Die Zahl der ausser G gegebenen Geraden, welche von den $\Psi(n, n+1)$ Curven getroffen werden sollen, ist jetzt

$$m = \frac{n(n+3)}{2} - (n+1) + 3 = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 3,$$

und den Forderungen wird genügt erstens durch die C_{n-1}, welche diese m Linien treffen, während die ergänzenden Geraden in E liegen; zweitens durch die C_{n-1}, welche $m-1$ Linien treffen, und ihre Ebene durch den Punct schicken, welche die m^{te} Gerade auf E bestimmt; drittens durch die C_{n-1}, welche $m-2$ Linien treffen, und ihre Ebene durch die in E

liegende Gerade schicken, welche die beiden nicht benutzten Linien mit einander verbindet. So ergiebt sich

$$\Psi(n, n+1) = \Psi(n-1) + m\Phi(n-1) + \frac{m(m-1)}{2}F(n-1),$$

und durch Summirung der Gleichungen (9) von $k = 1$ bis $k = n$:

$$\Psi(n) - \Psi(n-1) = \frac{1}{36}n^2(n^2-1)(2n^4 + 8n^3 + 23n^2 + 31n + 26).$$

Durch nochmalige Summirung nach n findet man endlich die zu beweisende Gleichung (3).

---

§ 5.

Übergang zu Curven mit Singularitäten.

1. Bei Plancurven im Raum treten an die Stelle der ersten und zweiten Characteristik μ, μ' die Zahlen ν, ρ, welche angeben, wie viele Curven des Systems eine gegebene Gerade treffen, bzw. eine Ebene berühren. Ferner ist eine neue Zahl μ einzuführen, die eine ganz andere Bedeutung hat als das frühere μ; es ist die Zahl derjenigen Curven des Systems, welche ihre Ebene durch einen gegebenen Punct schicken.

Die Zeuthen'schen Gleichungen sind von Herrn Schubert[1] verallgemeinert, und auf Systeme im Raum anwendbar gemacht. Aus ihrer neuen Form findet man unter anderen die folgenden, vorzugsweise zur Anwendung kommenden Relationen:

$$(1) \qquad \alpha = [3(n-1)^2 - 7d - 12e]\nu$$
$$- [2n(n-1)^2 - (7d + 12e)n + 6d + 12e]\mu - (7n - 12e - 18)b$$
$$- 6(2n - 2d - 3e - 3)c - 12y - 18z - 24\gamma_0'$$
$$+ 4(2d) + 15(3d) - 18(d2e);$$

---

[1] In Math. Annalen Bd. XIII pag. 445. Die an der linken Seite der Gleichung (15) anzubringende Reduction ist nicht $2d(2d-1)\mu$, sondern $2d\mu$.

$$(2)\qquad \beta = 2d\nu - 2d(n-1)\mu + 2(n-3)b - 3dc + 3y - 2(2d) \ldots$$
$$- 6(3d) + 4(d2e);$$

$$(3)\qquad \gamma = \frac{5}{2}e\nu - \left(\frac{5}{2}n - 3\right)e\mu - 2eb + \left(\frac{5}{2}n - 2d - 6e - 3\right)c$$
$$+ 2y + 6z + 12\gamma_0' + \frac{3}{2}(2de) + 6(d2e).$$

Die erste giebt für das System der Plancurven, welche $\frac{n(n+3)}{2} + 2$ gerade Linien treffen:

$$(4)\qquad \alpha = 3(n-1)^2\Psi(n) - 2n(n-1)^2\Phi(n),$$

wo $\Psi(n)$, $\Phi(n)$ die im vorigen Paragraphen berechneten Ausdrücke sind. Andere auf Systeme punctallgemeiner Curven bezügliche Zahlen erhält man aus der Formel

$$(3^a)\qquad \rho = 2(n-1)\nu - n(n-1)\mu - 2b - 3c$$

für $b = c = 0$. Mit Benutzung von Herrn SCHUBERT's Bezeichnung ergiebt sich, nach symbolischer Multiplication mit

$$\mu^h\nu^k\rho^{l-1} \quad \left(h \leqq 3,\ h + k + l = \frac{n(n+3)}{2} + 3\right)$$

$$\mu^h\nu^k\rho^l = 2(n-1)\,.\,\mu^h\nu^{k+1}\rho^{l-1} - n(n-1)\mu^{h+1}\nu^k\rho^{l-1}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung lässt sich der Exponent von ρ auf 0 herabdrücken, und man findet, durch Unterscheidung der drei Fälle $h = 2, 1, 0$:

$$(5)\qquad \left|\begin{aligned} \mu^2\nu^k\rho^l &= (2n-2)^l\left[F(n) - \frac{1}{2}ln\right], \\ \mu\nu^k\rho^l &= (2n-2)^l\left[\Phi(n) - \frac{1}{2}lnF(n) + \frac{1}{8}l(l-1)n^2\right], \\ \nu^k\rho^l &= (2n-2)^l\left[\Psi(n) - \frac{1}{2}ln\Phi(n) + \frac{1}{8}l(l-1)n^2F(n)\right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{24}l(l-1)(l-2)n^3\right]. \end{aligned}\right.$$

Dies ist jedoch nur für $l < 2n - 1$ richtig, weil anderenfalls die Gleichung (3_a) ihre Gültigkeit verliert.

2. Um eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen, will ich die elementaren Bedingungen, welche sich auf das Getroffenwerden gegebener gerader Linien beziehen, in der Bezeichnung weglassen. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Doppelpunctes soll bezeichnet werden mit

$$D, \quad D_\varepsilon, \quad D_g, \quad D_0,$$

je nachdem der Doppelpunct frei ist, oder in gegebener Ebene, in gegebener Geraden, oder an gegebener Stelle liegt; für Spitzen haben E, E_ε, u. s. w. die entsprechende Bedeutung.

$$B_\varepsilon, \quad B_{\varepsilon g}, \quad B_{\varepsilon p}$$

sind die Bedingungen, dass eine Ebene berührt werden soll, bzw. dass der Berührungspunct in einer Geraden, oder an gegebener Stelle der Ebene liegt. Endlich bedeuten die *symbolischen* Factoren

$$\mu, \quad \mu^2, \quad \mu^3,$$

wie bei Herrn SCHUBERT, dass die Ebene der Curve durch einen gegebenen Punct, bzw. eine gegebene Axe gehen soll, oder fest ist.

Hiernach lässt sich z. B. die Gleichung (4) schreiben:

$$[D] = 3(n-1)^2\Psi(n) - 2n(n-1)^2\Phi(n),$$

und die symbolische Multiplication mit μ hat hier, wie immer, zur Folge, dass $\Psi(n)$, $\Phi(n)$ bzw. in $\Phi(n)$, $F(n)$ übergehen.

3. Es sollen jetzt einige Formeln entwickelt werden, welche dazu dienen, die Zahl b eines gegebenen Systems zu bestimmen, und zwar zunächst für den einfachsten Fall $d = 1$, $e = 0$. Dabei werden die folgenden Ausdrücke benutzt:

$$(6) \qquad [B_{\varepsilon g}] = \Psi(n) - \Phi(n) - n(n-2)F(n),$$

$$(7) \qquad [B_{\varepsilon p}] = \Phi(n) - (2n-1)F(n) + n(n-1),$$

welche als Ergänzungen der Gleichung (3_a) für $b = c = 0$ anzusehen sind, und, wie diese, durch Anwendung des Correspondenzprincips auf Punctepaare der Ebene ε bewiesen werden.

In dem System (B_ε) sind endlich viele Curven enthalten, für welche der Berührungspunct X in einen Doppelpunct übergeht. Verbindet man daher eine feste Gerade L mit den Puncten X durch eine Ebene, welche die Curven noch in je $n - 1$ Puncten Y schneidet, so ist $[D_\varepsilon]$ in der Zahl

$$(n-1)(X) + (Y) - \{(n-1)[\mu B_\varepsilon] + (n-1)(X)\}$$

der Coincidenzen von Y mit X enthalten. Da nun

$$(Y) = (n-1)(X) + [B_\varepsilon], \qquad (X) = [B_{\varepsilon g}],$$

und da ferner eine Coincidenz auch dann eintritt, wenn die Curve ihre Ebene durch den Schnittpunct von L mit ε schickt, findet man

$$[D_\varepsilon] = [B_\varepsilon] + (n-1)[B_{\varepsilon g}] - n[\mu B_\varepsilon], \tag{8}$$

oder mit Benutzung von (3a) und (6):

$$[D_\varepsilon] = (n-1)[3\Psi(n) - (3n+1)\Phi(n) + 2nF(n)].$$

Eine Bestätigung erhält man wie folgt. Aus der letzten der Gleichungen (5) ergiebt sich für $l = 2$, wie viele Curven zwei Ebenen ε_1, ε_2, berühren. Lässt man nun ε_1, ε_2 in eine Ebene ε zusammenfallen, dann theilen sich die fraglichen Curven in folgende vier Gruppen: Solche, die ε in einem Puncte der Schnittgeraden von ε_1, ε_2 berühren; die eine in ε liegende Doppeltangente oder Wendetangente haben; endlich solche, die in ε einen Doppelpunct haben; in Zeichen:

$$(n-1)^2[4\Psi(n) - 4n\Phi(n) + n^2F(n)] = [B_{\varepsilon g}] + 2[T_\varepsilon] + 3[W_\varepsilon] + [D_\varepsilon].$$

Nun braucht man, um $2[T_\varepsilon]$, $[W_\varepsilon]$ zu erhalten, nur zu untersuchen, wie oft zwei der $n - 2$ weiteren Schnittpuncte der Curven (B_ε) zusammenfallen, und wie oft einer derselben mit dem Berührungspuncte zusammenfällt; durch Ausführung dieser leichten Rechnung findet man den obigen Ausdruck für $[D_\varepsilon]$ wieder. —

Die Curven $[D_g]$, $[D_0]$ sind bzw. in den Systemen $(B_{\varepsilon g})$, $(B_{\varepsilon p})$ enthalten, und auf dieselbe Art wie die Gleichungen (8) werden die folgenden bewiesen:

$$(9)\qquad [D_g] = [B_{\varepsilon g}] + (n-1)[B_{\varepsilon p}] - n[\mu B_{\varepsilon g}] + n$$
$$= \Psi(n) - 2\Phi(n) - (3n^2 - 6n + 1)F(n) + 2n(n-1)^2,$$

$$(10)\qquad [D_0] = [B_{\varepsilon p}] - n[\mu B_{\varepsilon p}] + 1$$
$$= \Phi(n) - (3n-1)F(n) + 3n^2 - 2n + 1.$$

Die Verallgemeinerung der Gleichungen (6), (7) ergiebt sich einfach dadurch, dass man von einem Systeme (d, e), statt von punctallgemeinen Curven ausgeht:

$$(11)\qquad [B_{\varepsilon g}, d, e] = [d, e] - [\mu; d, e] - n(n-2)[\mu^2; d, e]$$
$$- 2[D_g, d-1, e] - 3[E_g, d, e-1]$$

$$(12)\qquad [B_{\varepsilon p}, d, e] = [\mu; d, e] - (2n-1)[\mu^2; d, e] + n(n-1)[\mu^3; d, e]$$
$$- 2[D_0, d-1, e] - 3[E_0, d, e-1].$$

Legt man ferner das System (B_ε, d, e) anstatt des zur Gleichung (8) führenden (B_ε) zu Grunde, so erhält man, mit Berücksichtigung der wegen der singulären Puncte anzubringenden Reductionen:

$$(13)\qquad [D_\varepsilon, d, e] = [B_\varepsilon, d, e] + (n-1)[B_{\varepsilon g}, d, e] - n[\mu B_\varepsilon, d, e]$$
$$- 2\beta_\varepsilon - p_\varepsilon + 2b_\varepsilon - 3\gamma_\varepsilon - 3q_\varepsilon + 3c_\varepsilon.$$

Hier beziehen sich die mit dem Index ε versehenen β, p, b auf den in ε liegenden Doppelpunct des Systems $(D_\varepsilon, d-1, e)$, dagegen die γ, q, c auf die bevorzugte Spitze des Systems $(E_\varepsilon, d, e-1)$.

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Gleichungen (9), (10) verallgemeinern, und liefern so, in Verbindung mit (11) und (12) die Mittel, Zahlen b von Systemen $(d+1, e)$ durch Zahlen von Systemen (d, e) auszudrücken.

---

§ 6.

Beispiele. Curven mit einem Puncte höherer Vielfachheit.

1. Um die α-Formel auf das System (D) anwenden zu können, braucht man nur die Zahlen

$$\nu = [D], \qquad \mu = [\mu D], \qquad b = [D_\varepsilon]$$

desselben zu kennen, welche bereits im Vorigen berechnet sind. Man findet

$$[2D] = (n-1)(n-2)\Big\{(3n^2-3n-11)\Big[\tfrac{3}{2}\Psi(n) - 2n\Phi(n)\Big] + n(2n^3-2n^2-5n-6)F(n)\Big\}.$$

Für das System (D_ε) dagegen ist

$$\nu = [D_\varepsilon], \qquad \mu = [\mu D_\varepsilon], \qquad b = [D_g],$$

also

$$\begin{aligned}[D_\varepsilon D] = {} & (9n^3-27n^2-n+30)\Psi(n) \\ & -(15n^4-42n^3-6n^2+33n+22)\Phi(n) \\ & +(6n^5-10n^4-6n^3-60n^2+116n-24)F(n) \\ & -2n(n-1)(2n^3+3n^2-30n+24). \qquad (n>3)\end{aligned}$$

Dasselbe ergiebt sich aus (13) für $d=1$, $e=0$.

Durch Anwendung der β-Formel auf die Systeme

$$(D_0),\ (D_g),\ (D_\varepsilon),\ (D)$$

erhält man

$$[E_0] = 2\Phi(n) - 4(2n-1)F(n) + 4(3n^2-3n+1); \qquad (n>2)$$

$$[E_g] = 2\Psi(n) - 8\Phi(n) - 12(n^2-3n+1)F(n) + 8(2n^3-6n^2+4n-1); \qquad (n>2)$$

$$[E_\varepsilon] = (8n - 12)\Psi(n) - 4(3n^2 - 3n - 2)\Phi(n) + 8(3n^2 - 5n + 1)F(n) + 4n(n-1)^2(n-4); \qquad (n > 2)$$

$$[E] = 4(n-1)(n-2)[3\Psi(n) - 4n\Phi(n) + n(n+1)F(n)].$$

Die γ-Formel, auf die Systeme (E_ε), (E) angewandt, giebt

$$[S_\varepsilon] = (25n - 48)\Psi(n) - (50n^2 - 64n - 56)\Phi(n) + (192n^2 - 438n + 152)F(n) + 50n^4 - 384n^3 + 774n^2 - 488n + 96; \qquad (n > 3)$$

$$[S] = (50n^2 - 192n + 168)\Psi(n) - (100n^3 - 384n^2 + 336n)\Phi(n) + (10n^5 - 22n^4 + 54n^3 - 294n^2 + 376n - 72)F(n) - 2n(n-1)(32n^2 - 114n + 84). \qquad (n > 3)$$

Aus (13) ergiebt sich für $d = 1$, $e = 0$, wenn angenommen wird, dass der Doppelpunct des Systems $(1, 0)$ in einer Ebene ε_2 liege:

$$[D_{\varepsilon_1} D_{\varepsilon_2}] = (9n^2 - 18n + 2)\Psi(n) - (18n^3 - 30n^2 + 6n - 20)\Phi(n) + (9n^4 + 16n^2 - 101n + 38)F(n) - 12n^4 - 36n^3 + 152n^2 - 104n + 24. \qquad (n > 3)$$

Durch Zusammenfallen der beiden Ebenen ε_1, ε_2 geht diese Zahl über in

$$[D_{\varepsilon_1} D_{\varepsilon_2}] = 2[2D_\varepsilon] + [S_\varepsilon];$$

es lässt sich daher auch $[2D_\varepsilon]$ berechnen.

Für das System $(2D)$ kennt man jetzt die Zahlen

$$\nu = [2D], \qquad \mu = [\mu, 2D], \qquad b = [D_\varepsilon D], \qquad (2d) = [S], .$$

und aus der α-Formel folgt

$$[3D]$$

$$= (9n^6 - 54n^5 + 9n^4 + 423n^3 - 458n^2 - 829n + 1050)\left[\frac{1}{2}\Psi(n) - n\Phi(n)\right]$$

$$+ \frac{1}{3}(18n^8 - 108n^7 + 39n^6 + 727n^5 - 975n^4 + 13n^3 - 1908n^2$$

$$+ 3364n - 720)F(n)$$

$$- \frac{2}{3}n(n-1)(2n^7 - 10n^6 - n^5 + 40n^4 - 11n^3 + 338n^2 - 1212n + 840).$$

Insbesondere erhält man für $n = 3$ die von Herrn Schubert berechnete Zahl 7280 der ebenen Dreiseite, welche 9 gerade Linien treffen. —

Diese wenigen Beispiele werden genügen, zu zeigen, wie man allmälig zu Systemen mit grösserer Singularitätenzahl fortschreiten kann.

2. Es soll schliesslich noch die Aufgabe behandelt werden, die Zahl der Plancurven mit einem τ-fachen Puncte zu bestimmen, welche ausserdem nur noch elementare Geradenbedingungen zu erfüllen haben.

Man füge die Bedingungen hinzu, dass σ verschiedene Tangenten des τ-fachen Punctes X je eine von σ gegebenen Geraden $L_1, \ldots, L_\sigma$ treffen, und bezeichne das ν dieses Systems mit $f(\tau, \sigma)$, wo das zweite Argument, wenn es Null ist, weggelassen werden soll. Der X-Ort hat im Allgemeinen Puncte mit jeder der festen Geraden gemeinschaftlich; es soll $\varphi(\tau, \sigma - 1)$ angeben, wie viele Curven den τ-fachen Punct z. B. in L_1 haben; jede dieser Stellen ist $(\tau - \sigma + 1)$-facher Punct des X-Ortes, denn die betreffende Curve erfüllt $\tau - (\sigma - 1)$ mal die auf L_1 bezügliche Systemsbedingung.

Die Ebene, welche eine $(\sigma + 1)^{\text{te}}$ Gerade $L_{\sigma+1}$ mit den Puncten X verbindet, schneidet noch in je $n - \tau$ Puncten Y, deren Ort von der Ordnung

$$\nu + (n - \tau)(X)$$

ist. Daher ergiebt sich für die Zahl der Coincidenzen von Y mit X

$$\nu + (n - \tau)(X) - (n - \tau)[\mu f(\tau, \sigma)],$$

wo wieder der Factor μ symbolische Bedeutung hat, nämlich das Hinzutreten einer Ebenenbedingung zu den Systemsbedingungen anzeigt.

Diese Coincidenzen werden zum Theil dadurch veranlasst, dass eine Tangente von X sowohl $L_{\sigma+1}$ als eine der σ Geraden, z. B. L_1 trifft; und die Frage, wie oft dieses eintritt, kommt auf die beiden anderen zurück, wie oft eine Tangente von X in einer gegebenen, durch L_1 gelegten Ebene liegt, und wie oft sie durch einen gegebenen Punct von L_1 geht. Ersteres findet, nach dem oben Bemerkten,

$$(X) - (\tau - \sigma + 1)\varphi(\tau, \sigma - 1)$$

mal Statt. Ferner erfüllen die $[\mu f(\tau, \sigma)]$ Curven, welche ihre Ebene durch einen gegebenen Punct Q von L_1 schicken, die auf L_1 bezügliche Systemsbedingung entweder dadurch, dass eine Tangente von X durch Q geht, oder, und zwar $\tau - \sigma + 1$ mal, dadurch, dass die Ebene der Curve die Gerade L_1 ganz enthält. Mithin ist die zweite der gesuchten Zahlen

$$[\mu f(\tau, \sigma)] - (\tau - \sigma + 1)[\mu^2 f(\tau, \sigma - 1)].$$

Um daher $f(\tau, \sigma + 1)$ zu erhalten, hat man von der obigen Zahl der Coincidenzen von Y mit X

$$\sigma\{(X) + [\mu f(\tau, \sigma)]\} - \sigma(\tau - \sigma + 1)\{\varphi(\tau, \sigma - 1) + [\mu^2 f(\tau, \sigma - 1)]\}$$

abzuziehen, und findet, für $\sigma < \tau$

$$\begin{aligned} f(\tau, \sigma + 1) - f(\tau, \sigma) = (n - \tau - \sigma)(X) - (n - \tau + \sigma)[\mu f(\tau, \sigma)] \\ + \sigma(\tau - \sigma + 1)\{\varphi(\tau, \sigma - 1) + [\mu^2 f(\tau, \sigma - 1)]\}; \end{aligned}$$

für $\sigma = \tau$ aber ist das erste Glied der linken Seite durch $f(\tau + 1)$ zu ersetzen.

Die etwa noch unbekannten Zahlen auf der rechten Seite lassen sich in derselben Weise reduciren wie $f(\tau, \sigma)$; und da die hinzutretenden Bedingungen theils die Lage des τ-fachen Punctes, theils die Ebene, in welcher die Curve liegen soll, einer weiteren Beschränkung unterwerfen, so führt die hinreichend oft wiederholte Anwendung jener Gleichung auf Bekanntes.

Man erkennt so die Möglichkeit, die gestellte Aufgabe, auch z. B. für den Fall eines freien τ-fachen Punktes, zu lösen. Ich habe jedoch die

erforderliche Rechnung nur für den Fall durchgeführt, dass der τ-fache Punct in einer gegebenen Geraden liegt, also $\varphi(\tau, \sigma - 1) = 0$ ist, und so gefunden:

$$72\{[P_g^\tau] - [P_g^{\tau+1}]\}$$
$$= \tau(4n^6 + 48n^5 + 142n^4 + 202n^3 + 76n^2 + 8n)$$
$$+ \tau^2(4n^6 + 60n^5 + 124n^4 + 11n^3 - 221n^2 - 80n - 44)$$
$$+ \tau^3(12n^5 - 48n^4 - 338n^3 - 258n^2 + 23n - 26)$$
$$- \tau^4(30n^4 + 155n^3 - 225n^2 - 125n - 26) - \tau^5(8n^3 - 228n^2 + 67n - 10)$$
$$+ \tau^6(42n^2 - 105n + 14) - \tau^7(24n - 16) + 4\tau^8.$$

Durch Summirung nach τ ergiebt sich ein Ausdruck für $[P_g^\tau]$, wenn $[P_g^1] = \Psi(n)$ bekannt ist. Aber die Herleitung der Gleichung setzt $\Psi(n)$ nicht als bekannt voraus; und da andererseits $[P_g^n]$ als Zahl der Gruppen von n in einer Ebene liegenden, in einem Puncte von g sich schneidenden Strahlen, welche $n + 3$ weitere gerade Linien treffen, leicht direct zu ermitteln, nämlich gleich

$$2\binom{n+3}{3}\binom{n}{2} + 4 \cdot \frac{1}{6}\binom{n+3}{2}\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2} = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)(n + 2)(n + 3)$$

ist, so giebt die Summirung von $\tau = 1$ bis $\tau = n - 1$ eine Bestätigung des in § 4 auf anderem Wege hergeleiteten Ausdrucks für $\Psi(n)$.

Freiburg, im September 1884.

DÉDUCTION ARITHMÉTIQUE
D'UNE RELATION DUE À JACOBI.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

PAR

R. LIPSCHITZ
à BONN.

. . . . . Il y a quelque temps que vous m'avez fait savoir, comme vous jugiez désirable, que la relation de JACOBI

$$\vartheta_0(0,\ q)\vartheta_2(0,\ q)\vartheta_3(0,\ q) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta_3(w,\ q)}{dw}\right)_{(w=0)}$$

fût établie arithmétiquement. Ces derniers jours j'ai réussi à en trouver une démonstration, que vous me permettez de vous communiquer.

Je suis parti de l'observation, que, si l'on représente les fonctions $\vartheta_0(0, q)$, $\vartheta_2(0, q)$, $\vartheta_3(0, q)$ à l'aide du produit infini $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^n) = G(q)$, comme dans la lettre que j'ai eu le plaisir de vous adresser le 20 Décembre 1883, et qui a été imprimée dans les Acta mathematica, T. 4, p. 195—196, de sorte que l'on ait

$$\vartheta_0(0,\ q) = \frac{G^2(q)}{G(q^2)}, \qquad \vartheta_2(0,\ q) = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{G^2(q^4)}{G(q^2)}, \qquad \vartheta_3(0,\ q) = \frac{G^2(-q)}{G(q^2)},$$

le produit des trois fonctions prend la forme

$$\frac{2q^{\frac{1}{4}}G^2(q)G^2(q^4)G^2(-q)}{G^3(q^2)},$$

qui, par l'équation

$$G(q)G(q^4)G(-q) = G^3(q^2)$$

se change dans l'expression $2q^{\frac{1}{4}}G^3(q^2)$. Or l'équation en question est transformée dans celle-ci

$$2q^{\frac{1}{4}}G^3(q^2) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta_3(w,\ q)}{dw}\right)_{(w=0)}$$

qui coïncide avec la formule (5) de l'article 66 des *Fundamenta*, et qui a été ramenée à des considérations purement arithmétiques par JACOBI dans le travail: *Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen*, Journal de CRELLE, T. 21, p. 13. Cela étant, j'ai essayé de démontrer l'équation dont il s'agit, en suivant une route semblable à celle de JACOBI.

En désignant par a et c tous les nombres depuis $-\infty$ à $+\infty$, par b et f tous les nombres impairs positifs, on a

$$\vartheta_0(0,\ q) = \Sigma(-1)^a q^{a^2},$$

$$\vartheta_2(0,\ q) = \Sigma 2q^{\frac{b^2}{4}},$$

$$\vartheta_3(0,\ q) = \Sigma q^{c^2},$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta(w,\ q)}{dw}\right)_{(w=0)} = \Sigma 2(-1)^{\frac{f-1}{2}} f q^{\frac{f^2}{4}}.$$

Dans l'équation, qui est à établir, je prends les coëfficients différentiels des deux côtés par rapport à la variable $\log q$, ce qui donne la relation

$$\frac{\Sigma(-1)^a a^2 q^{a^2}}{\Sigma(-1)^a q^{a^2}} + \frac{\Sigma \frac{b^2}{4} q^{\frac{b^2}{4}}}{\Sigma q^{\frac{b^2}{4}}} + \frac{\Sigma c^2 q^{c^2}}{\Sigma q^{c^2}} = \frac{\Sigma(-1)^{\frac{f-1}{2}} \frac{f^3}{4} q^{\frac{f^2}{4}}}{\Sigma(-1)^{\frac{f-1}{2}} q^{\frac{f^2}{4}}},$$

ou bien, en se débarrassant des dénominateurs,

$$\sum\sum\sum\sum\left(a^2 + \frac{b^2}{4} + c^2 - \frac{f^2}{4}\right)(-1)^{a+\frac{f-1}{2}} f q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}} = 0.$$

Evidemment il suffit d'établir cette relation pour en conclure l'équation proposée.

Comme les lettres a et c signifient la même chose et les lettres b et f pareillement, il est permis de changer a avec c, et b avec f. Il y a donc quatre expressions de la même série qui, ajoutées ensemble, donnent le résultat

$$\sum\sum\sum\sum\Big(a^2+c^2+\frac{b^2}{4}-\frac{f^2}{4}\Big)[(-1)^a+(-1)^c](-1)^{\frac{f-1}{2}} f q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}}$$

$$+\sum\sum\sum\sum\Big(a^2+c^2+\frac{f^2}{4}-\frac{b^2}{4}\Big)[(-1)^a+(-1)^c](-1)^{\frac{b-1}{2}} b q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}}$$

$$=\sum\sum\sum\sum\left|\begin{array}{c}\Big\{a^2+c^2-\Big[\frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}b-(-1)^{\frac{f-1}{2}}f}{2}\Big]^2\Big\}\\ \times[(-1)^a+(-1)^c][(-1)^{\frac{b-1}{2}}b+(-1)^{\frac{f-1}{2}}f]q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}}\end{array}\right|.$$

D'ailleurs en remplaçant $2(a^2+c^2)$ par $(a+c)^2+(a-c)^2$ le double de la série devient égal à la somme de la série

$$\sum\sum\sum\sum\left|\begin{array}{c}\Big\{(a+c)^2-\Big[\frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}b-(-1)^{\frac{f-1}{2}}f}{2}\Big]^2\Big\}\\ \times[(-1)^a+(-1)^c][(-1)^{\frac{b-1}{2}}b+(-1)^{\frac{f-1}{2}}f]q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}}\end{array}\right|,$$

et de celle qui s'en déduit en substituant $-c$ au lieu de c. Mais ces deux séries se trouvant égales il suffit de démontrer que la première s'évanouit.

Or l'exposant de q est égal à la quatrième partie de la somme de quatre carrés

$$(2a)^2+b^2+(2c)^2+f^2,$$

dont deux sont pairs, et deux impairs. Elle représente donc tous les nombres de l'une des deux formes $8n+2$ et $8n+6$. Pour la première on a $a+c\equiv 0 \pmod 2$, pour la seconde $a+c\equiv 1 \pmod 2$. Dans le deuxième cas il suit $(-1)^a+(-1)^c\equiv 0 \pmod 2$, partant dans notre série quadruple tous les termes, où $a+c\equiv 1 \pmod 2$, sont nuls. Reste donc le double de la série

$$\sum\sum\sum\sum(-1)^a\left|\begin{array}{c}\Big\{(a+c)^2-\Big[\frac{(-1)^{\frac{b-1}{2}}b-(-1)^{\frac{f-1}{2}}f}{2}\Big]^2\Big\}\\ \times[(-1)^{\frac{b-1}{2}}b+(-1)^{\frac{f-1}{2}}f]q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}}\end{array}\right|.$$

étendue à tous les nombres a et c, qui remplissent la condition $a + c \equiv 0 \pmod 2$. Mais on peut déduire de chaque combinaison de nombres a, b, c, f une combinaison a', b', c', f' telle, que, partant de la première on arrive à la seconde, et que l'on a en même temps, en posant $(-1)^{\frac{b-1}{2}} = \beta$, $(-1)^{\frac{f-1}{2}} = \delta$, $(-1)^{\frac{b'-1}{2}} = \beta'$, $(-1)^{\frac{f'-1}{2}} = \delta'$, les deux équations

$$a^2 + \frac{b^2}{4} + c^2 + \frac{f^2}{4} = a'^2 + \frac{b'^2}{4} + c'^2 + \frac{f'^2}{4},$$

$$(-1)^a \left[(a+c)^2 - \left(\frac{\beta b - \delta f}{2}\right)^2\right](\beta b + \delta f)$$

$$+ (-1)^{a'} \left[(a'+c')^2 - \left(\frac{\beta' b' - \delta' f'}{2}\right)^2\right](\beta' b' + \delta' f') = 0.$$

Il suit des définitions données, que les quantités $a + c$ et $\frac{\beta b - \delta f}{2}$ sont paires, la quantité $\frac{\beta b + \delta f}{2}$ est impaire. On peut donc toujours déterminer $\varepsilon = \pm 1$ de sorte que la condition

$$a + c + \varepsilon\left(\frac{\beta b + \delta f}{2}\right) \equiv 1 \pmod 4)$$

soit satisfaite. Maintenant faisons

$$a + c = \frac{\beta' b' - \delta' f'}{2}, \qquad \frac{\beta b + \delta f}{2} = \varepsilon\left(\frac{\beta' b' + \delta' f'}{2}\right)$$

$$a - c = a' - c', \qquad \frac{\beta b - \delta f}{2} = a' + c'.$$

Alors viennent les équations

$$2a' = \quad a - c + \frac{\beta b - \delta f}{2}$$

$$2c' = -(a - c) + \frac{\beta b - \delta f}{2}$$

$$\beta' b' = \quad a + c + \varepsilon\left(\frac{\beta b + \delta f}{2}\right)$$

$$\delta' f' = -(a + c) + \varepsilon\left(\frac{\beta b + \delta f}{2}\right),$$

où

$$2a' \equiv 0, \qquad 2c' \equiv 0, \qquad \beta' b' \equiv 1, \qquad \delta' f' \equiv 1 \pmod 4,$$

puis:

$$a^2 + \frac{b^2}{4} + c^2 + \frac{f^2}{4} = a'^2 + \frac{b'^2}{4} + c'^2 + \frac{f'^2}{4},$$

et:

$$\left[(a+c)^2 - \left(\frac{\beta b - \delta f}{2}\right)^2\right](\beta b + \delta f)$$

$$= -\left[(a'+c')^2 - \left(\frac{\beta' b' - \delta' f'}{2}\right)^2\right]\varepsilon(\beta' b' + \delta' f').$$

Il s'agit donc de démontrer la relation

$$(-1)^a = (-1)^{a'}\varepsilon.$$

Mais nous avons $2a' - 2a = -(a+c) + \dfrac{\beta b - \delta f}{2}$,

$$2a' - 2a \equiv -(a+c) + \varepsilon\left(\frac{\beta b - \delta f}{2}\right) \pmod 4$$

$$1 \equiv \quad (a+c) + \varepsilon\left(\frac{\beta b + \delta f}{2}\right) \pmod 4,$$

partant

$$2a' - 2a \equiv -1 + \varepsilon\beta b \equiv -1 + \varepsilon \pmod 4,$$

ou bien

$$a' - a \equiv \frac{-1+\varepsilon}{2} \pmod 2,$$

ce qui donne la relation cherchée. Il est donc fondé, que dans la série

$$\sum\sum\sum\sum(-1)^a\left[(a+c)^2 - \left(\frac{\beta b - \delta f}{2}\right)^2\right](\beta b + \delta f)q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}},$$

où $a + c \equiv 0 \pmod 2$, tous les termes pris deux à deux se détruisent, et que pour les cas où l'on a les équations $a = a'$, $c = c'$ les termes correspondants de la série deviennent égaux à zéro. La série s'évanouit donc toujours, ce qu'il fallait démontrer.

Pour les combinaisons de nombres a, b, c, f, où c diffère de zéro, il n'est pas sans intérêt de considérer la combinaison a'', b'', c'', f'', $\eta = \pm 1$.

qui correspond à la combinaison $a, b, -c, f$. Alors nos équations donnent

$$a - c = \frac{\beta''b'' - \delta''f''}{2}, \qquad \frac{\beta b + \delta f}{2} = \eta\left(\frac{\beta''b'' + \delta''f''}{2}\right)$$

$$a + c = a'' - c'', \qquad \frac{\beta b - \delta f}{2} = a'' + c''.$$

En éliminant les nombres a, b, c, f, on trouve

$$a' - c' = \frac{\beta''b'' - \delta''f''}{2}, \qquad \frac{\beta'b' + \delta'f'}{2} = \varepsilon\eta\left(\frac{\beta''b'' + \delta''f''}{2}\right)$$

$$a' + c' = a'' + c'', \qquad \frac{\beta'b' - \delta'f'}{2} = a'' - c'',$$

ce qui fait voir, qu'à la combinaison $a', b', -c', f'$ correspond la combinaison $a'', b'', -c'', f''$. On a donc ces trois couples de combinaisons

$$\begin{array}{lll} (a,\ b,\ \ \ c,\ f) & \text{et} & (a',\ b',\ \ \ c',\ f') \\ (a,\ b,\ -c,\ f) & \text{et} & (a'',\ b'',\ \ \ c'',\ f'') \\ (a',\ b',\ -c',\ f') & \text{et} & (a'',\ b'',\ -c'',\ f''). \end{array}$$

Pour celles, où a diffère de zéro, on peut faire de la manière semblable; mais dans les cas où $a = 0$ et $c = 0$ les trois couples de combinaisons rentrent dans un seul.

Bonn, 2 Février 1885.

ZUR THEORIE DER ELIMINATION

VON

E. NETTO

in BERLIN.

Herr J. MOLK hat in seiner schönen Abhandlung: *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité* etc. (Acta mathematica, Bd. 6), durch welche er sich das Verdienst erworben hat, einen Teil der fundamentalen KRONECKER'schen Untersuchungen in ausgeführter Darstellung zu geben, eines Satzes Erwähnung getan, den ich ihm gelegentlich mitteilte. Er findet sich Cap. IV, § 1, Nr. 6 seiner Arbeit; die Anführung meines Namens daselbst giebt mir Veranlassung, das Theorem hier mitzuteilen. In geometrischer Ausdrucksweise lautet dasselbe: *Geht eine algebraische Curve $F(x, y) = 0$ durch sämtliche Schnittpunkte zweier anderer algebraischen Curven $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$, dann ist eine Potenz der Function $F(x, y)$ als lineare homogene Function von $f(x, y)$ und $f_1(x, y)$ darstellbar, d. h. es wird*

$$F(x, y)^{\mu} = f(x, y)\cdot g(x, y) + f_1(x, y)\cdot g_1(x, y),$$

wo die g, g_1 wie f, f_1, F ganze Functionen von x, y bedeuten.

In der bequemen KRONECKER'schen Schreibweise heisst dies:

$$F(x, y)^{\mu} \equiv 0; \qquad [\mathrm{mod}\,(f(x, y),\ f_1(x, y))].$$

Wir setzen, ohne der Allgemeinheit zu schaden, voraus, dass f, f_1 keinen gemeinsamen Teiler haben.

Nehmen wir zuerst die lineare Substitution

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = \gamma x + \delta y$$

mit unbestimmten Coefficienten vor, und führen dadurch f, f_1 in $\varphi(\xi, \eta)$, $\varphi_1(\xi, \eta)$ über, dann kann man es durch passende Wahl von α, β, γ, δ bewirken, dass die beiden Eliminationsresultanten für $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$ nämlich $R_1(\xi) = 0$, $R_2(\eta) = 0$ nur für die vielfachen Schnittpunkte von φ, φ_1 vielfache Wurzeln besitzen und zwar genau in der Multiplicität der entsprechenden Schnittpunkte. Sind also $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \ldots; \xi_k, \eta_k$ sämtliche von einander verschiedene Wertsysteme, welche gleichzeitig $\varphi(\xi, \eta) = 0$, $\varphi_1(\xi, \eta) = 0$ befriedigen, dann wird

$$(1) \qquad \begin{aligned} R_1(\xi) &= (\xi - \xi_1)^{\mu_1}(\xi - \xi_2)^{\mu_2} \ldots (\xi - \xi_k)^{\mu_k} \\ R_2(\eta) &= (\eta - \eta_1)^{\mu_1}(\eta - \eta_2)^{\mu_2} \ldots (\eta - \eta_k)^{\mu_k}, \end{aligned}$$

und μ_α giebt die Multiplicität von ξ_α, η_α an.

Führen wir ferner eine neue Variable u durch die Substitution

$$u = \sigma\xi + \tau\eta$$

mit willkürlichem, unbestimmten σ und mit $\tau = 1$ an die Stelle von η ein, und setzen dementsprechend $u_\alpha = \sigma\xi_\alpha + \tau\eta_\alpha$, so mögen $\varphi(\xi, \eta)$, $\varphi_1(\xi, \eta)$ weiter in $\tilde{\omega}(\xi, u)$, $\tilde{\omega}_1(\xi, u)$ übergehen. Die Resultante dieser beiden Ausdrücke liefert dann bei der Elimination von ξ eine Function, welche durch Specialisirung in die beiden Formen (1) gebracht werden kann, und die folglich die Form hat

$$(2) \qquad \begin{aligned} R(u) &= \tilde{\omega}(\xi, u).h(\xi, u) + \tilde{\omega}_1(\xi, u).h_1(\xi, u) \\ &= (u - u_1)^{\mu_1}(u - u_2)^{\mu_2} \ldots (u - u_k)^{\mu_k}. \end{aligned}$$

Hebt man den Factor $(u - u_\alpha)^{\mu_\alpha}$ hervor, so kann man setzen

$$(u - u_\alpha)^{\mu_\alpha} S_\alpha(u) = R(u) \equiv 0; \qquad [\bmod (\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1)]$$

und daher, wenn man auf die Variablen ξ, η zurückgeht,

$$3) \quad [\sigma(\xi - \xi_\alpha) + \tau(\eta - \eta_\alpha)]^{\mu_\alpha} . \prod_\beta [\sigma(\xi - \xi_\beta) + \tau(\eta - \eta_\beta)]^{\mu_\beta} \equiv 0; \quad [\bmod (\varphi, \varphi_1)]$$

$$(\beta = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, k).$$

Da σ willkürlich ist, müssen in der Entwickelung von (3) die Coefficienten

der einzelnen Potenzen von σ einzeln congruent Null mod (φ, φ_1) sein. Die höchste Potenz liefert unmittelbar

$$(4_a) \qquad (\xi - \xi_\alpha)^{\mu_\alpha} P_\alpha \equiv 0; \qquad P_\alpha = \prod_\beta (\xi - \xi_\beta)^{\mu_\beta},$$

wobei also P_α für alle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ mit Ausnahme von ξ_α verschwindet.

Vergleicht man ferner die Coefficienten der nächst hohen Potenz von σ auf beiden Seiten der Congruenz (3) so folgt

$$\mu_\alpha (\xi - \xi_\alpha)^{\mu_\alpha - 1} (\eta - \eta_\alpha) P_\alpha + (\xi - \xi_\alpha)^{\mu_\alpha} \sum_\beta \mu_\beta \frac{\eta - \eta_\beta}{\xi - \xi_\beta} P_\alpha \equiv 0,$$

und daraus durch Multiplication mit $\prod (\xi - \xi_\beta)$ und unter Berücksichtigung von (4_a)

$$(4_b) \qquad (\xi - \xi_\alpha)^{\mu_\alpha - 1} (\eta - \eta_\alpha) . P'_\alpha \equiv 0; \qquad P'_\alpha = \prod_\beta (\xi - \xi_\beta)^{\mu_\beta + 1}.$$

Sucht man weiter den Coefficienten von τ^2 auf, so findet sich

$$\frac{\mu_\alpha(\mu_\alpha - 1)}{1.2} (\xi - \xi_\alpha)^{\mu_\alpha - 2} (\eta - \eta_\alpha)^2 P_\alpha + \mu_\alpha (\xi - \xi_\alpha)^{\mu_\alpha - 1} (\eta - \eta_\alpha) \sum_\beta \mu_\beta \frac{\eta - \eta_\beta}{\xi - \xi_\beta} P_\alpha$$

$$+ (\xi - \xi_\alpha)^{\mu_\alpha} \left[\sum_\beta \frac{\mu_\beta(\mu_\beta - 1)}{1.2} \left(\frac{\eta - \eta_\beta}{\xi - \xi_\beta} \right)^2 + \sum_{\beta, \gamma} \mu_\beta \mu_\gamma \frac{(\eta - \eta_\beta)(\eta - \eta_\gamma)}{(\xi - \xi_\beta)(\xi - \xi_\gamma)} \right] P_\alpha \equiv 0$$

und daraus durch Multiplication mit $\prod (\xi - \xi_\beta)^2$ und unter Berücksichtigung von (4_a) und (4_b)

$$(4_c) \qquad (\xi - \xi_\alpha)^{\mu_\alpha - 2} (\eta - \eta_\alpha)^2 . P''_\alpha \equiv 0; \qquad P''_\alpha = \prod_\beta (\xi - \xi_\beta)^{\mu_\beta + 2}.$$

In genau derselben Art findet man allgemein

$$(4) \qquad \begin{aligned} &(\xi - \xi_\alpha)^{\mu_\alpha - \rho} (\eta - \eta_\alpha)^\rho . P^{(\rho)}_\alpha \equiv 0; \qquad \bmod (\varphi, \varphi_1) \\ &P^{(\rho)}_\alpha = \prod_\beta (\xi - \xi_\beta)^{\mu_\beta + \rho}, \end{aligned}$$

wobei also $P^{(\rho)}_\alpha$ für $\xi = \xi_\alpha$ nicht verschwindet.

Nachdem dieser Hülfssatz bewiesen ist, nehmen wir eine Curve $\Phi = 0$, welche durch die sämtlichen Schnittpunkte von $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$

geht, oder eine Function $\Phi(\xi, \eta)$, die für alle Systeme $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \ldots; \xi_k, \eta_k$ verschwindet, welche $\varphi(\xi, \eta) = 0$, $\varphi_1(\xi, \eta) = 0$ gleichzeitig befriedigen. Dann ist

$$(5) \qquad \Phi(\xi, \eta) = (\xi - \xi_\alpha)\Psi(\xi, \eta) + (\eta - \eta_\alpha)\Psi_1(\xi, \eta),$$

und durch Erhebung in die μ_α^{te} Potenz und Multiplication mit $P^{(\mu_\alpha)}$ findet man

$$(6) \qquad \Phi(\xi, \eta)^{\mu_\alpha} . P^{(\mu_\alpha)} \equiv 0; \qquad [\text{mod}\,(\varphi, \varphi_1)].$$

Es bezeichne nun μ den höchsten der Exponenten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, dann kann natürlich in (6) μ_α durch μ ersetzt werden; multiplicirt man ferner mit einer noch unbestimmten Grösse u_α und summirt über $\alpha = 1, 2, \ldots, k$, so ergiebt sich

$$(7) \qquad \Phi(\xi, \eta)^{\mu}[u_1 P_1 + u_2 P_2 + \ldots + u_k P_k] \equiv 0; \qquad [\text{mod}\,(\varphi, \varphi_1)].$$

In dieser Congruenz kann die Klammer, welche ausser von den unbestimmten Grössen nur von ξ abhängt, für keinen Wert dieser Variablen verschwinden. Folglich lassen sich die u als Functionen von ξ so wählen, dass der Wert der Klammer gleich einer Constanten, z. B. gleich Eins wird. Es entsteht also das zu beweisende Resultat

$$\Phi(\xi, \eta)^{\mu} \equiv 0; \qquad [\text{mod}\,(\varphi, \varphi_1)]$$

mit dem Zusatze, *dass die Potenz, welche ausreicht, um die geforderte Darstellung zu ermöglichen, gleich der höchsten bei den Schnittpunkten auftretenden Multiplicität sein wird.*

Berlin, März 1885.

Weierstraß

GEB. 1815 OCT. 31.

ÜBER VERSCHIEDENE THEOREME AUS DER THEORIE DER PUNCTMENGEN IN EINEM n-FACH AUSGEDEHNTEN STETIGEN RAUME G_n.

ZWEITE MITTHEILUNG [1]

VON

GEORG CANTOR

in HALLE.

Indem ich die weitere Darstellung meiner Untersuchungen über Punctmengen beginne, will ich *zunächst* in § 1 kurz diejenigen hierher gehörigen Sätze anführen, welche theils schon in einer Abhandlung sich vorfinden, die ich im XXIII^ten^ Bande der Mathematischen Annalen, p. 453 veröffentlicht habe, theils auch in Aufsätzen der Herren Bendixson und Phragmén (Acta mathematica, T. 2, p. 415 und T. 5, p. 47) von anderen Gesichtspuncten aus behandelt worden sind. Dabei möchte ich mich auf eine einfache Erklärung und Formulirung der in Betracht kommenden Theoreme und auf eine Andeutung ihrer Beweise beschränken; denn die ausführliche Entwickelung kann in der erwähnten Annalenarbeit gefunden werden.

§ 1.

Es ist eine sehr häufig in der Punctmengenlehre auftretende Erscheinung, dass *Eigenschaften* von Punctmengen in Betracht kommen, die den folgenden *beiden* Bedingungen genügen:

---

[1] Fortsetzung des Aufsatzes in Acta mathematica, T. 2, p. 409.

Erstens: wenn P *irgend* eine mit der *betreffenden Eigenschaft* behaftete Punctmenge innerhalb eines Gebietes H von G_n bedeutet, wo H *ganz* im Endlichen liegt, und man zerlegt H *mit gehöriger Vertheilung der Begrenzungsstücke* in eine *endliche* Anzahl von *Theilgebieten* $H_1, H_2, \ldots, H_m$, in welche resp. die *Theilmengen* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ von P fallen, so hat *immer mindestens eine* von diesen *Theilmengen* ebenfalls die *betreffende Eigenschaft.*

Zweitens: ist P *irgend* eine mit der *betreffenden* Eigenschaft begabte Punctmenge, so hat immer auch $P+Q$ *dieselbe* Eigenschaft, was auch Q sei.

Ich will nun unter Υ *irgend eine Punctmengenbeschaffenheit* verstehen, welche diesen *beiden* Bedingungen genügt; dann gilt der folgende allgemeine Satz:

Theorem I. »*Ist H irgend ein ganz im Endlichen liegender continuirlicher Theil von G_n und P eine in H enthaltene Punctmenge mit der Eigenschaft Υ, so giebt es wenigstens einen Punct g von H in solcher Lage, dass, wenn $K(\rho)$ die n-dimensionale Vollkugel mit dem Mittelpunct g und dem Radius ρ ist, derjenige Bestandtheil von P, welcher in das Gebiet $K(\rho)$ fällt, stets die Eigenschaft Υ hat, der Radius ρ der Vollkugel mag so klein genommen werden, wie man wolle.*»

Unter einer *abgeschlossenen* Punctmenge (ensemble fermé) verstehe ich eine solche P, bei welcher die Bedingung erfüllt ist:

$$(1) \qquad \mathfrak{D}(P,\ P^{(1)}) = P^{(1)}.$$

Dagegen nenne ich eine Punctmenge P *insichdicht* (ensemble condensé en soi) wenn bei ihr die Gleichung erfüllt ist:

$$(2) \qquad \mathfrak{D}(P,\ P^{(1)}) = P.$$

Ist eine Punctmenge so beschaffen, dass sie *keinen insichdichten* Bestandtheil hat, so nenne ich sie eine *separirte* Punctmenge.

Zur Erläuterung dieser Definitionen führe ich an, dass jede *perfecte* Punctmenge *sowohl abgeschlossen, wie* auch *insichdicht* ist, dass die *Ableitung* einer *insichdichten* Punctmenge stets *perfect* ist und dass die *isolirten* Punctmengen eine besondere Art von *separirten* Mengen bilden; auch sind alle *abgeschlossenen* Punctmengen *erster* Mächtigkeit (wegen Theorem A) eben-

sowohl, wie alle Mengen der Form $P - \mathfrak{D}(P, P^{(\Omega)})$ *separirte* Mengen; letztere Behauptung kann leicht mit Hülfe des gleich folgenden Theorems III bewiesen werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird sich der Satz ergeben, dass *alle separirten* Mengen höchstens von der *ersten* Mächtigkeit sind.

Theorem II. »*Ist eine in G_n vorkommende Punctmenge P so beschaffen, dass, wenn H ein ganz im Endlichen befindlicher Theil von G_n ist, alsdann immer der in H enthaltene Bestandtheil von P endlich ist oder die erste Mächtigkeit besitzt, so ist P selbst entweder endlich oder von der ersten Mächtigkeit.*«

Theorem III. »*Es sei Q irgend eine abgeschlossene Punctmenge und R eine Punctmenge von solcher Beschaffenheit, dass erstens R keinen Punct mit Q gemein hat, wie auch zweitens, dass, wenn H irgend ein stetiger Bestandtheil von G_n ist, in den kein einziger Punct von Q fällt, alsdann der zum Gebiete H gehörige Bestandtheil von R endlich ist oder die erste Mächtigkeit hat, so ist auch R selbst höchstens von der ersten Mächtigkeit.*«

Zum Beweise des letzteren Theorems bediene ich mich eines n-fach ausgedehnten, aus einem oder mehreren getrennten *stetigen Theilen* bestehenden Raumtheils, den ich mit:

$$\Pi(\rho, Q)$$

bezeichne, weil er sowohl von einer beliebigen positiven Grösse ρ, wie auch von der abgeschlossenen Menge Q abhängt; er geht dadurch aus der Menge Q hervor, dass man *sämmtliche* n-dimensionalen Vollkugeln vom Radius ρ zusammennimmt, deren *Centra* zu Q gehörige Puncte sind. Wegen der in Bezug auf R gemachten Voraussetzungen fällt in den Raumtheil:

$$G_n - \Pi(\rho, Q),$$

wie klein auch ρ sei, stets ein Bestandtheil von R, der höchstens die *erste* Mächtigkeit hat und andererseits kann ρ immer so klein gewählt werden, dass dieser Raumtheil $G_n - \Pi(\rho, Q)$ einen beliebig vorher ins Auge gefassten Punct r von R enthält, da sonst dieser Punct auch der *abgeschlossenen* Menge Q angehören würde. Daraus schliesst man leicht, indem man ρ unendlich klein werden lässt, dass R selbst *höchstens* die erste Mächtigkeit besitzt.

Theorem D. »*Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punctmenge von solcher*

Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ *eine höhere Mächtigkeit hat, als die erste, so giebt es immer Puncte, welche allen Ableitungen* $P^{(\alpha)}$ *zugleich angehören, wo* α *irgend eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse ist und der Inbegriff aller dieser Puncte, der nichts Anderes ist als* $P^{(\Omega)}$, *ist stets eine perfecte Menge.*»

Theorem E. »*Ist* P *von derselben Beschaffenheit wie in Theorem D und ist* $S = P^{(\Omega)}$ *die perfecte Menge, deren Existenz in Theorem D ausgesprochen ist, so ist die Differenz:*

$$R = P^{(1)} - S$$

stets höchstens von der ersten Mächtigkeit und es lässt sich daher die erste Ableitung $P^{(1)}$ *einer solchen Punctmenge* P *in zwei Bestandtheile* R *und* S *zerlegen, derart dass:*

$$P^{(1)} = R + S$$

wo R *höchstens von der ersten Mächtigkeit und* S *eine perfecte Menge ist.*»

Theorem F. »*Ist* P *von derselben Beschaffenheit wie in den Theoremen D und E, so giebt es stets eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenclasse zugehörige Zahl* α, *so dass:*

$$P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)} = P^{(\alpha+\lambda)}$$

wo λ *eine ganz beliebige endliche oder transfinite Zahl ist und es ist also bereits die* α^{te} *Ableitung von* P *gleich der perfecten Menge* S, *d. h. man hat:*

$$P^{(\alpha)} = P^{(\Omega)} = S.\text{»}$$

Theorem G. »*Ist* R *die in Theorem E vorkommende Menge,* α *die in Theorem F so bezeichnete Zahl, so ist immer:*

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\alpha)}) = 0$$

und umsomehr:

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\Omega)}) = 0.\text{»}$$

Dieses letzte Theorem G rührt von Herrn Bendixson her. Die Beweise dieser Sätze D, E, F, G beruhen sowohl auf den Theoremen I und III, wie auch auf den früher gebrachten Theoremen A, B, C; die Ausführung hiervon findet sich in den Mathematischen Annalen, Bd. XXIII.

Die Ableitung $P^{(1)}$ und daher auch alle höheren Ableitungen *irgend einer* Punctmenge P sind stets *abgeschlossene* Mengen und es lässt sich

leicht auch das Umgekehrte beweisen, dass *jede abgeschlossene* Menge als die *erste* (oder auch höhere) Ableitung von anderen Mengen dargestellt werden kann (Mathematische Annalen, Bd. XXIII, p. 470); daher sind wir im Stande auf Grund unserer Theoreme Folgendes über die *abgeschlossenen* Mengen zu behaupten:

Theorem H. »*Ist P irgend eine abgeschlossene Punctmenge, so besteht dieselbe immer aus zwei wesentlich verschiedenen, getrennten Bestandtheilen R und S (von welchen einer auch Null sein kann), so dass:*

$$(3) \qquad P = R + S,$$

wo R eine separirte Menge und höchstens von der ersten Mächtigkeit, während S, falls sie nicht gleich Null, eine perfecte Menge und daher (Acta mathematica, T. 4, p. 381)[1] *von der Mächtigkeit des Linearcontinuums ist. Falls die abgeschlossene Menge P endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist, verschwindet der Theil S und man hat alsdann von einem gewissen kleinsten α der ersten oder zweiten Zahlenclasse an (welches kleinste α stets von der ersten Art ist);*

$$P^{(\alpha)} = 0.$$

Ist aber die abgeschlossene Menge P von höherer als der ersten Mächtigkeit, so ist S immer eine von Null verschiedene perfecte Menge und man hat von einem gewissen kleinsten α der ersten oder zweiten Zahlenclasse an:

$$P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+\lambda)} = S$$

und somit auch:

$$P^{(\Omega)} = S.$$

Die separirte Menge R hat dabei die Eigenschaft, dass:

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) = \mathfrak{D}(R, R^{(\Omega)}) = 0.$$

Alle abgeschlossenen unendlichen Punctmengen sind entweder von der ersten Mächtigkeit oder von der Mächtigkeit des Linearcontinuums (Mathematische Annalen, Bd. XXIII, p. 488).»

Ich will nun im Folgenden zeigen, wie sich alle diese Sätze auf *beliebige*, also auch auf *nicht abgeschlossene* Punctmengen *verallgemeinern* lassen.

---

[1] Man vergleiche auch: I. Bendixson, *Sur la puissance des ensembles parfaits de points* (Bihang till Svenska Vetenskapsakademiens handlingar Bd. 9, N° 6, 1884).

§ 2.

Ist eine *insichdichte* Punctmenge P so beschaffen, dass der in hinreichend nahe Umgebung (d. h. Vollkugel mit dem betreffenden Punct als Centrum) jedes ihrer Puncte fallende Bestandtheil derselben *stets*, d. h. für *alle* ihre Puncte *eine und dieselbe Mächtigkeit* hat, so wollen wir eine solche insichdichte Menge eine *homogene* Punctmenge nennen und wenn jene Mächtigkeit die α^{te} ist, so möge P eine *homogene Punctmenge* α^{ter} *Ordnung* heissen. Es ist leicht zu zeigen, dass eine homogene Menge α^{ter} Ordnung immer selbst von der α^{ten} Mächtigkeit ist.

So ist z. B. die Menge *aller rationalen* Zahlen eine *homogene* Menge *erster* Ordnung, die Menge *aller irrationalen* Zahlen aber eine *homogene* Menge von der *Mächtigkeit des Linearcontinuums.*

Sei nun P eine *ganz beliebige* Punctmenge innerhalb G_n. Sie wird aus *zweierlei* Puncten bestehen; die *ersteren* liegen so, dass in *hinreichend naher* Umgebung von ihnen keine anderen Puncte von P fallen, es sind dies sogenannte *isolirte* Puncte von P; die *anderen* Puncte von P sind *gleichzeitig Grenzpuncte* von P, gehören also auch als *Puncte* zu $P^{(1)}$.

Den Inbegriff der *ersteren* wollen wir mit Pa bezeichnen und die *Adhärenz* von P nennen; der Inbegriff der letzteren werde mit Pc bezeichnet und heisse die *Cohärenz* von P.

Wir haben alsdann:

$$Pc = \mathfrak{D}(P,\ P^{(1)}) \tag{4}$$

$$P = Pa + Pc. \tag{5}$$

Pa und Pc sind also bestimmte Theile von P.

Pa ist immer eine *isolirte* Menge oder Null; Pc braucht weder das eine noch das andere zu sein, auch ist klar, dass *jeder insichdichte Bestandtheil von P zugleich Bestandtheil von Pc ist und dass Pc dann und nur dann gleich P (daher $Pa = 0$ und umgekehrt) ist, wenn P eine insichdichte Menge ist.*

Auf Pc können wir dieselbe Zerlegung anwenden und haben, wenn Pcc mit Pc^2 bezeichnet wird:

$$Pc = Pca + Pc^2; \qquad P = Pa + Pca + Pc^2.$$

Wird die ν-malige wiederholte Anwendung der *Operation* c auf P mit Pc^ν bezeichnet, so hat man auch:

$$P = Pa + Pca + Pc^2a + \ldots + Pc^{\nu-1}a + Pc^\nu.$$

Pc^ν heisse die ν^{te} *Cohärenz* von P.

Es lässt sich nun aber auch auf Grund *vollständiger Induction* der Begriff der γ^{ten} *Cohärenz* von P definiren, wo γ eine beliebige *transfinite* Zahl ist.

Bedeutet γ eine *transfinite* Zahl der *ersten* Art, so definirt man:

$$(6) \qquad Pc^\gamma = (Pc^{\gamma-1})c.$$

Ist aber γ eine *transfinite* Zahl der *zweiten* Art, so sei:

$$(7) \qquad Pc^\gamma = \mathfrak{D}(\ldots, Pc^{\gamma'}, \ldots)$$

wo γ' *alle* Zahlen zu durchlaufen hat, die kleiner sind als γ. Zum Verständniss der letzten Gleichung (7) beachte man, dass *stets* $Pc^{\gamma'}$ *ganz* in $Pc^{\gamma''}$ enthalten ist, wenn $\gamma'' < \gamma'$ ist.

Nach diesen Festsetzungen besteht für alle Zahlenpaare γ und δ die Gleichung:

$$(8) \qquad (Pc^\gamma)c^\delta = Pc^{\gamma+\delta}$$

und, was auch γ für eine *finite* oder *transfinite* Zahl sei, wie leicht zu beweisen, das folgende Theorem:

$$(9) \qquad P = \sum_{\gamma'=0,1,\ldots<\gamma} Pc^{\gamma'}a + Pc^\gamma.$$

Hier haben die verschiedenen Bestandtheile der rechten Seite $Pc^{\gamma'}a$ und Pc^γ unter einander keinen Zusammenhang, d. h. keine gemeinschaftlichen Puncte; jedes Glied $Pc^{\gamma'}a$ stellt als *Adhärenz* von $Pc^{\gamma'}$ eine *isolirte* Menge dar, die Summe $\sum\limits_{\gamma'=0,1,\ldots<\gamma} Pc^{\gamma'}a$ *selbst* ist offenbar immer eine *separirte* Menge, weil *jeder insichdichte* Bestandtheil von P auch Bestandtheil von Pc^γ ist, mithin jene Summe *keinen insichdichten* Bestandtheil haben kann.

Es soll nun bewiesen werden, »*das wenn P eine separirte Menge ist, alsdann eine der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige kleinste Zahl α existirt, so dass: $Pc^\alpha = 0$ und daher auch $Pc^{\alpha+\lambda} = 0$, dass aber wenn P*

nicht eine separirte Menge ist, alsdann eine ebensolche Zahl α in der ersten oder zweiten Zahlenclasse vorhanden ist, so dass Pc^{α}, und daher auch $Pc^{\alpha+\lambda}$ eine i n s i c h d i c h t e *Menge ist.*»

Den *Beweis* des zuletzt behaupteten Satzes führen wir wie folgt.

1°. Betrachten wir *zuerst* den Fall, *dass P von der ersten Mächtigkeit* ist und wenden den in (9) ausgesprochenen Satz für $\gamma = \Omega$ an, wo Ω die *kleinste* Zahl der *dritten* Zahlenclasse ist, so haben wir:

$$P = \sum_{\gamma'=0,1,2,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a + Pc^{\Omega}.$$

Wären nun auf der rechten Seite alle Glieder $Pc^{\gamma'}a$ von Null verschieden, so hätte diese Seite unsrer Gleichung *zum Mindesten die zweite Mächtigkeit*, das gleiche würde also auch von der linken Seite, d. h. von P gelten, gegen unsere Voraussetzung, dass P die *erste* Mächtigkeit besitzt. Es muss also Zahlen γ' und unter ihnen eine *kleinste* α geben (denn es ist eine Eigenthümlichkeit der *ganzen* Zahlen, dass *jeder* Inbegriff von solchen, möge er aus *endlichen* oder *transfiniten* Zahlen bestehen, ein *Minimum* besitzt), so dass:

$$Pc^{\alpha}a = 0.$$

Nun ist aber:

$$Pc^{\alpha} = Pc^{\alpha}a + Pc^{\alpha+1},$$

daher:

$$Pc^{\alpha} = Pc^{\alpha+1} = (Pc^{\alpha})c.$$

Ist hier Pc^{α} von Null verschieden, so folgt aus der letzten Gleichung, dass Pc^{α} und daher auch $Pc^{\alpha+\lambda}$ eine *insichdichte* Menge ist. Ist P eine separirte Menge, so kann nicht Pc^{α} eine insichdichte Menge sein und ist folglich *Null*; ist aber P keine separirte Menge, so kann Pc^{α} nicht Null sein und ist folglich *insichdicht.*

2°. Gehen wir nun zu der Annahme über, *dass P eine höhere Mächtigkeit hat, als die erste.*

Die *Eigenschaft* eine *höhere* Mächtigkeit, als die *erste* zu haben, genügt den *beiden* Bedingungen, welche wir zu *Anfang* dieser Arbeit angeführt haben, sie ist also eine solche, auf welche das Theorem I Anwendung findet, worin wir daher unter Γ die soeben characterisirte *Mengenbeschaffenheit* uns denken können. Wenn man ausserdem noch das Theorem II berücksichtigt, so folgt, dass im Raum G_n Puncte q vorhanden sein müssen derart, dass in *jede* um q als Mittelpunct mit dem Radius ρ beschriebene

n-dimensionale Vollkugel $K(\rho)$ ein Bestandtheil von P fällt, welcher eine *höhere* Mächtigkeit hat, als die *erste*. Bezeichnen wir den *Inbegriff aller dieser Puncte* q mit Q, so sieht man leicht dass Q eine *abgeschlossene* Menge ist; denn jeder *Grenzpunct* von Q erfüllt dieselbe Bedingung, wie diejenige ist, durch welche wir die Puncte q definirt haben, er gehört also selbst zu Q.

Die beiden Mengen P und Q müssen nun *gemeinschaftliche* Puncte haben, oder mit anderen Worten, es ist $\mathfrak{D}(P, Q)$ *von Null verschieden.*

Dies folgt aus Theorem III, wenn wir darin an die Stelle der mit R bezeichneten Menge unsere Menge P setzen, während die dort mit Q bezeichnete die Bedeutung der uns *hier vorliegenden* Menge Q erhält.

Betrachten wir nämlich einen stetigen Theil H von G_n, in den *kein* Punct von Q fällt, so wird *der in das Gebiet H fallende Bestandtheil P_1 von P höchstens von der ersten Mächtigkeit sein;* denn wäre P_1 von *höherer* Mächtigkeit, so würde es nach dem *soeben Bewiesenen* eine Menge Q_1 geben, die zu P_1 dasselbe Verhältniss hat, wie Q zu P und es würde offenbar Q_1 ein Bestandtheil von Q sein, der ganz innerhalb des Gebietes H läge, gegen die Voraussetzung, welche mit Bezug auf H gemacht worden ist.

Wäre also $\mathfrak{D}(P, Q) = 0$, so wären *beide* Bedingungen, denen das Theorem III unterliegt, erfüllt und wir würden daraus schliessen können, dass P selbst eine Menge von *höchstens der ersten* Mächtigkeit sei, während wir es doch hier mit einer Menge P von *höherer* Mächtigkeit zu thun haben. *Also ist $\mathfrak{D}(P, Q)$ von Null verschieden.*

Fassen wir nun die Menge $\mathfrak{D}(P, Q)$ näher ins Auge und bezeichnen sie mit V. Sie besteht aus den zu P gehörigen Puncten v, die eine solche Lage haben, dass in *jeder* Umgebung von v Puncte von P liegen, deren Inbegriff von *höherer* Mächtigkeit ist, als von der ersten. *Kein Punct v von V ist ein isolirter* Punct von V und P; denn umgeben wir v als Mittelpunct mit einer beliebigen Vollkugel $K(\rho)$, so fällt in dieselbe ein Bestandtheil V_1 von P, der von *höherer* als der *ersten* Mächtigkeit ist; das letztere können wir auch von der Menge $V_1 - v$ sagen, die aus V_1 hervorgeht, wenn man von letzterer den *einzigen* Punct v in Abzug bringt; daher muss es nach dem vorhin für P Bewiesenen auch unter den Puncten von $V_1 - v$ *solche* geben, dass die in jede Umgebung von ihnen fallenden Bestandtheile von $V_1 - v$ eine *höhere* als die *erste* Mäch-

tigkeit besitzen und letztere Puncte sind offenbar auch Puncte von V. Man sieht also, dass wenn ein beliebiger Punct v als Mittelpunct mit einer Vollkugel $K(\rho)$ von beliebig kleinem Radius ρ umgeben wird, in das Innere dieser Vollkugel noch *andere* Puncte von V hinein fallen, als v; es ist also v sicherlich *kein isolirter* Punct von V.

Da nun bewiesen ist, dass *jeder* Punct v von V ein *Grenzpunct* von V ist, so ist V eine *insichdichte Menge.*

Wir sehen daher, dass jede Punctmenge P von *höherer als der ersten* Mächtigkeit einen *bestimmten insichdichten Bestandtheil* V besitzt, der aus *allen Puncten* v von P zusammengesetzt ist, welche eine solche Lage haben, dass in jede um v als Centrum beschriebene Vollkugel $K(\rho)$ ein Bestandtheil von P hinein fällt, der von *höherer als der ersten Mächtigkeit* ist.

Daraus folgt zunächst, dass eine *separirte unendliche Menge stets von der ersten Mächtigkeit* ist; denn wir nannten *separirte* Menge eine solche, die *keinen insichdichten* Bestandtheil hat; wäre sie von *höherer* als der *ersten Mächtigkeit,* so müsste sie nach dem soeben Bewiesenen einen *insichdichten* Bestandtheil besitzen. Bei dieser Gelegenheit möchte ich erwähnen, dass auch Herr Bendixson, wie ich von ihm brieflich erfahren, einen ähnlichen Beweis dieses letzteren Satzes gefunden hat, nachdem ich ihn zur Untersuchung dieser Frage angeregt hatte. Kehren wir nun unter der *vorliegenden Annahme,* dass P von *höherer* Mächtigkeit, als der *ersten* ist, zu der Gleichung (9) zurück und setzen auch hier $\gamma = \Omega$, betrachten also die folgende Gleichung:

$$P = \sum_{\gamma'=0,1,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a + Pc^{\Omega}.$$

Der Bestandtheil $\sum_{\gamma'=0,1,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a$ der rechten Seite, welchen wir R nennen wollen, stellt, wie schon früher hervorgehoben worden ist, eine *separirte* Menge vor, weil jeder *insichdichte* Bestandtheil von P auch in *jeder Cohärenz* von P, also auch in Pc^{Ω} enthalten ist; jeder *insichdichte* Bestandtheil von R wäre auch ein solcher von P, und daher auch von Pc^{Ω}, was dadurch ausgeschlossen ist, dass $\mathfrak{D}(R, Pc^{\Omega}) = 0$ ist.

R als *separirte* Menge hat, wie wir gesehen, höchstens die *erste* Mächtigkeit.

Nun ist:

$$R = \sum_{\gamma'=0,1,\ldots,\omega,\ldots<\Omega} Pc^{\gamma'}a \tag{10}$$

und wir schliessen aus dieser Gleichung, dass unter den Gliedern $Pc^{\alpha'}a$ der rechten Seite solche vorhanden sein müssen, welche verschwinden, weil sonst R von *höherer als der ersten Mächtigkeit* sein würde. Ist darnach α die *kleinste* der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse angehörige Zahl, für welche:

$$Pc^{\alpha}a = 0,$$

so folgt daraus, dass:

$$Pc^{\alpha} = (Pc^{\alpha})c.$$

Hier ist der Fall $Pc^{\alpha} = 0$ ausgeschlossen, weil Pc^{α} *zum Mindesten* aus dem *insichdichten* Bestandtheil V von P besteht; also ist Pc^{α} und daher auch $Pc^{\alpha+\lambda} = Pc^{\Omega}$ eine *insichdichte* Menge.

Der mit V bezeichnete *insichdichte* Bestandtheil von P, dessen Existenz in dem Falle nachgewiesen ist, dass P eine höhere Mächtigkeit, als die *erste* hat, ist Bestandtheil der *insichdichten* Menge $Pc^{\alpha} = Pc^{\Omega}$; bezeichnen wir nun den Inbegriff *aller* übrigen Puncte von Pc^{α} mit U, derart dass:

$$(11) \qquad Pc^{\alpha} = Pc^{\Omega} = U + V,$$

so sieht man leicht, *dass U nur Null* oder eine *homogene* Menge *erster Ordnung* sein kann. Denn in *jeder* Nähe eines Punctes u von U fallen, da Pc^{α} *insichdicht* ist, unendlich viele Puncte von Pc^{α}; diese können aber in *hinreichender* Nähe nur dem Theil U, nicht aber dem Theil V angehören, weil sonst u nach der Definition von V ein Punct der letzteren Menge sein würde; es liegen also in *jeder* Umgebung von u andere Puncte von U, deren Inbegriff aber *keine* höhere Mächtigkeit, als die *erste* haben kann, weil sonst ebenfalls u zu V gehören würde.

Bemerken wir noch, dass wir wegen $Pc^{\alpha}a = Pc^{\alpha+\lambda}a = 0$ die Gleichung (10) wie folgt schreiben können:

$$(12) \qquad R = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a$$

und fassen die gewonnenen Resultate in Folgendem zusammen.

Theorem J. »*Ist P eine separirte unendliche Menge, so ist sie von der ersten Mächtigkeit und es giebt eine kleinste Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse, so dass:*

$$Pc^{\alpha} = 0;$$

man hat also in diesem Falle (wegen (9), wenn darin $\gamma = \alpha$ gesetzt wird):

$$P = \sum_{\alpha' = 0, 1, \ldots < \alpha} Pc^{\alpha'} a.»$$

Theorem K. *»Ist P von der ersten Mächtigkeit, ohne jedoch eine separirte Menge zu sein, so giebt es eine der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige kleinste Zahl α, so dass Pc^{α} eine homogene Menge erster Ordnung wird; bezeichnen wir diese mit U und $\sum\limits_{\alpha' = 0, 1, \ldots < \alpha} Pc^{\alpha'} a$ mit R, so ist R entweder Null oder eine separirte Menge und man hat:*

$$P = R + U.$$

Dabei ist:

$$\mathfrak{D}(R,\ U^{(1)}) = 0.»$$

Die letzte Behauptung hat ihren Grund darin, dass, wenn ein Punct r von R zu $U^{(1)}$ gehören würde, $r + U$ ebenso wie U eine *insichdichte* Menge und somit ein Bestandtheil von $U = Pc^{\alpha}$ wäre.

Theorem L. *»Ist P von höherer als der ersten Mächtigkeit, so giebt es eine der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige kleinste Zahl α, derart dass Pc^{α} eine insichdichte Menge ist; letztere besteht aus einem Bestandtheil V, welcher insichdicht ist und alle Puncte von P umfasst, welche so liegen, dass in jeder Umgebung von ihnen Bestandtheile von P enthalten sind, die von höherer als der ersten Mächtigkeit sind und aus einem Bestandtheil U, der, falls er nicht Null ist, aus der Zusammensetzung der übrigen Puncte von Pc^{α} besteht und eine homogene Menge erster Ordnung bildet; wird die Summe $\sum\limits_{\alpha' = 0, 1, \ldots < \alpha} Pc^{\alpha'} a$ mit R bezeichnet, so ist R entweder Null oder eine separirte Menge und man hat:*

$$P = R + U + V.$$

Dabei ist:

$$\mathfrak{D}(R,\ U^{(1)}) = 0; \qquad \mathfrak{D}(R,\ V^{(1)}) = 0; \qquad \mathfrak{D}(U,\ V^{(1)}) = 0.»$$

Die letzten Relationen werden ganz ebenso bewiesen, wie die entsprechende Behauptung in Theorem K.

§ 3.

Die in § 2 nachgewiesenen wesentlich verschiedenen und auseinander fallenden Bestandtheile einer *beliebigen* Punctmenge P scheinen mir wichtig genug, um besondere *Bezeichnungen* und *Namen* zu rechtfertigen.

Wir wollen R den *Rest* oder das *Residuum* von P nennen und mit Pr bezeichnen, dagegen heisse $Pc^{\Omega} = U + V$ die *totale Inhärenz* von P und werde mit Pi bezeichnet, so dass man hat:

$$(13) \qquad Pr = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a$$

$$(14) \qquad Pi = Pc^{\alpha} = Pc^{\Omega}$$

$$(15) \qquad P = Pr + Pi.$$

U heisse die *Inhärenz erster Ordnung* von P oder auch die *erste Inhärenz* von P und es werde dafür das Zeichen Pi_1 gebraucht.

Was nun die *insichdichte* Menge V anbetrifft, so sieht man zwar aus § 2 leicht: sie ist derart, dass in jeder Nähe *jedes* ihrer Puncte v eine höhere Mächtigkeit, als die erste, von Puncten, nicht bloss der Menge P, *sondern von V selbst* liegen, indessen steht zunächst noch nicht fest, dass sie stets eine *homogene* Menge ist, falls sie nicht verschwindet; dies wird erst dann sicher gestellt sein, wenn wir gezeigt haben werden, dass bei den *Punctmengen innerhalb G_n keine höhere Mächtigkeit* vorkommen kann, als die *zweite;* denn sobald dies bewiesen wäre, würde daraus folgen, dass V, falls sie nicht verschwindet, eine *homogene Menge zweiter Ordnung* ist. Indem wir also fürs Erste die Möglichkeit des Vorkommens *höherer Mächtigkeiten,* als der *zweiten* zu berücksichtigen haben, ergiebt sich hier allgemein Folgendes.

Ist v irgend ein Punct von V und ist $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu, \ldots$ irgend eine Reihe von positiven Grössen, derart dass:

$$\rho_\nu > \rho_{\nu+1} \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \rho_\nu = 0,$$

und bezeichnet man mit V_ν den Theil von V welcher in die um v als *Mittelpunct* beschriebene Vollkugel $K(\rho_\nu)$ fällt, mit α_ν die *Ordnungszahl*

der *Mächtigkeit* von V_ν, so ist klar, dass α_ν *nicht kleiner* sein kann, als $\alpha_{\nu+1}$, dass also:

$$\alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1};$$

denn $V_{\nu+1}$ ist ein *Theil* von V_ν.

Wir haben also eine einfach unendliche Reihe von *endlichen* oder *transfiniten ganzen* Zahlen α_ν, welche mit wachsendem ν *nicht* zunehmen; von einer *solchen* Reihe *ganzer* Zahlen ist aber *leicht* zu zeigen, dass ihre Glieder von einem Gewissen $\nu = \nu_0$ an *alle einander gleich* sein müssen, so dass:

$$\alpha_{\nu_0} = \alpha_{\nu_0+1} = \alpha_{\nu_0+2} = \cdots$$

Man setze den gemeinsamen Werth aller dieser Zahlen $= \beta$.

Wir sehen also, dass $V_{\nu_0}, V_{\nu_0+1}, V_{\nu_0+2}, \ldots$ *alle* von der β^{ten} Mächtigkeit sind und erkennen daraus leicht, dass wenn $\rho \leqq \rho_{\nu_0}$, derjenige Bestandtheil von V, welcher in die um v als *Mittelpunct* beschriebene Vollkugel $K(\rho)$ fällt, *immer* die β^{te} *Mächtigkeit* hat; denn, da ρ seiner Grösse nach zwischen zwei bestimmte Glieder der Reihe $\rho_{\nu_0}, \rho_{\nu_0+1}, \rho_{\nu_0+2}, \ldots$ fällt, so stösst man ebensowohl bei der Annahme, dass die Mächtigkeit des bezeichneten Theils von V *grösser* als β, wie auch, dass sie *kleiner* als β sei, auf einen Widerspruch.

Wir sehen hieraus, dass zu jedem Punct v von V eine ganz bestimmte *endliche* oder *überendliche* Zahl β gehört, derart, dass für *hinreichend kleine* Werthe von ρ der in die, um v als *Centrum* beschriebene Vollkugel $K(\rho)$ fallende Bestandtheil von V die β^{te} *Mächtigkeit* hat; wir wollen daher auch β die zum Puncte v gehörige *Ordnungszahl* und v einen *Punct* β^{ter} *Ordnung von* V *oder* P nennen.

Der Inbegriff *aller* Puncte β^{ter} *Ordnung* von V, falls solche überhaupt vorhanden sind, bildet, wie leicht zu sehen, eine *homogene Punctmenge* β^{ter} *Ordnung* und *Mächtigkeit*, welche wir die β^{te} *Inhärenz* oder die *Inhärenz* β^{ter} *Ordnung* von P nennen und mit Pi_β bezeichnen.

Wir haben nun:

$$V = \sum_{\beta=2,3,\ldots} Pi_\beta, \tag{16}$$

wo auf der Rechten die einzelnen Glieder auch Null sein können und β *alle endlichen* und *überendlichen* ganzen Zahlen, die grösser als 1 sind zu durchlaufen hat.

Da nun nach (14) $Pi = Pc^{\Omega} = U + V$ und $U = Pi_1$, so können wir schreiben:

$$(17) \qquad Pi = \sum_{\beta=1,2,\ldots} Pi_{\beta},$$

wo hier β alle positiven ganzen Zahlen von 1 an zu durchlaufen hat. Zwischen den verschiedenen von uns nachgewiesenen Bestandtheilen einer Punctmenge herrschen allgemein Beziehungen, die hervorgehoben zu werden verdienen.

Betrachten wir zuerst die Definitionen von Pa und Pc, wie sie uns in den Formeln (4) und (5) entgegentreten, so sehen wir, dass:

$$(18) \qquad \mathfrak{D}(Pa,\ Pc) = 0,$$

$$(19) \qquad \mathfrak{D}[Pa,\ (Pa)^{(1)}] = 0,$$

$$(20) \qquad \mathfrak{D}[Pa,\ (Pc)^{(1)}] = 0,$$

(18) sagt aus, dass die beiden Mengen Pa und Pc völlig getrennt (zusammenhangslos) sind, d. h. keine ihnen gemeinsam angehörigen Puncte haben; (19) besagt, dass Pa eine *isolirte* Menge ist, (20) lässt erkennen, dass Pa auch keinen Punct hat, der Grenzpunct von Pc wäre.

Die *isolirten* Puncte von P bilden Pa, wir wollen sie *Puncte* 0^ter^ *Art von* P nennen; die *isolirten* Puncte von Pc bilden Pca, wir wollen sie *Puncte* 1^ter^ *Art von* P nennen.

Allgemein wollen wir die Puncte der *isolirten* Menge $Pc^{\alpha'}a$ *Puncte* α'^{ter} *Art von* P nennen.

Die aus (13), (15) und (17) hervorgehende Formel:

$$(21) \qquad P = \sum_{\alpha'=0,1,\ldots<\alpha} Pc^{\alpha'}a + \sum_{\beta=1,2,\ldots} Pi_{\beta}$$

zeigt, dass ein beliebiger Punct p von P entweder einem Bestandtheil $Pc^{\alpha'}a$ von P angehört, dann ist p ein *Punct* α'^{ter} *Art von* P und α' ist eine bestimmte Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse, kleiner als α oder 0, oder es gehört p einem Bestandtheil Pi_{β} von P an und ist alsdann ein *Punct* β^{ter} *Ordnung von* P. Die *sämmtlichen* Puncte α'^{ter} *Art* von P bilden daher, wenn überhaupt welche vorhanden sind, eine *isolirte* Menge, die sämmtlichen Puncte β^{ter} *Ordnung* von P bilden dagegen, falls es deren überhaupt giebt, eine *homogene* Menge β^{ter} Ordnung.

Man kann die in Pr enthaltenen Puncte *Artpuncte* von P und die in Pi vorkommenden Puncte *Ordnungspuncte* von P nennen.

Aus der *Abwesenheit* von Puncten α'^{ter} Art von P folgt auch das *Nichtvorhandensein* von Puncten $(\alpha' + \lambda)^{\text{ter}}$ Art, wo λ eine beliebige Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse ist; denn, wenn $Pc^{\alpha'}a = 0$, so ist $Pc^{\alpha'}$ entweder *Null* oder eine *insichdichte* Menge und es ist daher allgemein: $Pc^{\alpha'+\lambda} = Pc^{\alpha'}$ und $Pc^{\alpha'+\lambda}a = 0$. Daher zeigt *umgekehrt* das *Vorhandensein* von Puncten α'^{ter} Art auch *immer* das *Vorhandensein* von Puncten *jeder niedrigeren* Art an.

Dagegen hat die *Abwesenheit* oder das *Vorhandensein* von Puncten β^{ter} *Ordnung* keinerlei Einfluss auf das *Vorkommen* oder *Nichtvorkommen* von *Ordnungspuncten* mit *andrer* Ordnungszahl oder von *Artpuncten.*

Wenden wir die Relation (20) auf $Pc^{\alpha'}$ an Stelle von P an, so haben wir:

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pc^{\alpha'})^{(1)}] = 0. \tag{22}$$

Nun ist aber sowohl $Pc^{\alpha'+\lambda}a$, wie auch Pi_β Bestandtheil von $Pc^{\alpha'}$; wir haben also auch:

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pc^{\alpha'+\lambda}a)^{(1)}] = 0 \tag{23}$$

$$\mathfrak{D}[Pc^{\alpha'}a,\ (Pi_\beta)^{(1)}] = 0. \tag{24}$$

So sehen wir, dass der Bestandtheil $Pc^{\alpha'}a$ von P weder *Grenzpuncte* von $Pc^{\alpha'+\lambda}a$, noch *Grenzpuncte* von Pi_β zu *Puncten* hat.

Alle Puncte der rechten Seite von (21), *mit Ausnahme der im ersten Gliede Pa enthaltenen,* sind zugleich *Grenzpuncte* von P und man ist daher berechtigt, wenn $\alpha' > 0$, einen *Punct* α'^{ter} Art von P auch *Grenzpunct* α'^{ter} Art von P und einen *Punct* β^{ter} Ordnung von P auch *Grenzpunct* β^{ter} Ordnung von P zu nennen; nur die Puncte 0^{ter} *Art* von P können *nicht* zugleich *Grenzpuncte von P* heissen, weil sie *isolirte Puncte* von P sind.

$Pc^{\alpha'}$ können wir offenbar characterisiren als den Inbegriff sowohl *aller Artpuncte von P, deren Artzahl* $\geq \alpha'$, wie auch *aller Ordnungspuncte* von P; $Pi = V = Pc^{\Omega}$ ist der Inbegriff *aller Ordnungspuncte von P.*

Was nun das Verhältniss der *Inhärenzen* zu einander sowohl, wie zu

dem *Rest* von P anbetrifft, so können wir allgemein darüber Folgendes behaupten:

$$(25) \qquad \mathfrak{D}[Pr,\ (Pi)^{(1)}] = 0$$

und daher ist auch:

$$(26) \qquad \mathfrak{D}[Pr,\ (Pi_\beta)^{(1)}] = 0.$$

Denn da Pi eine *insichdichte* Menge ist, so ist auch $Pi + Z$ eine *insichdichte* Menge, falls Z irgend ein Bestandtheil von $(Pi)^{(1)}$ ist; wäre also $\mathfrak{D}[Pr,\ (Pi)^{(1)}]$ von Null verschieden und bezeichnen wir diese Menge mit Z, so würde $Pi + Z$ ein *insichdichter* Bestandtheil von P und daher auch von $Pi = Pc^{\Omega}$ sein, während doch Z als Bestandtheil von Pr nicht in Pi enthalten sein kann.

Ferner können wir sagen, dass:

$$(27) \qquad \mathfrak{D}[Pi_\beta,\ (Pi_{\beta'})^{(1)}] = 0$$

vorausgesetzt, dass: $\beta' > \beta$.

Denn jeder *Grenzpunct* von $Pi_{\beta'}$ ist, falls er *Punct* von P ist, nothwendig ein *Ordnungspunct* von P von *mindestens* der β'^{ten} Ordnung, kann also nicht *Punct* von Pi_β sein, da alle Puncte von Pi_β *Puncte* β^{ter} Ordnung von P sind und $\beta < \beta'$ angenommen ist.

Es liessen sich unsere Betrachtungen noch nach mancher Richtung vervollständigen, was für eine spätere Gelegenheit vorbehalten bleibt.

Ich will nun zeigen, wie unsere früheren Theoreme, die wir im Theorem H zusammengezogen haben, sich aus den neuen Resultaten ergeben, sobald man nur die Menge P als *abgeschlossen* voraussetzt.

Unter einer *abgeschlossenen* Menge verstanden wir nach (1) eine solche P, deren Ableitung $P^{(1)}$ *ganz* in ihr enthalten ist, so dass:

$$\mathfrak{D}(P,\ P^{(1)}) = P^{(1)}.$$

Es fällt daher bei *abgeschlossenen* Mengen, nach (4), die *erste Cohärenz* von P, die wir Pc nennen, mit der *ersten Ableitung* zusammen; wir haben:

$$(28) \qquad Pc = P^{(1)},$$

vorausgesetzt, dass P *abgeschlossen* ist.

Nun wissen wir aber, dass auch *alle* Ableitungen $P^{(\gamma)}$ *abgeschlossene* Mengen sind, woraus folgt, dass *allgemein* in unserm Fall:

(29) $$Pc^{\gamma} = P^{(\gamma)},$$

und daher:

(30) $$Pc^{\gamma}a = P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)},$$

wo für $\gamma = 0$ unter $P^{(0)}$ nichts anderes als P zu verstehen ist.

Endlich haben wir hier:

(31) $$Pi = Pc^{\Omega} = P^{(\Omega)}.$$

$P^{(\Omega)}$ ist daher, falls sie nicht Null ist, eine *insichdichte* Menge, und da sie ausserdem als *Ableitung* von P eine *abgeschlossene* Menge ist, so folgt hieraus, dass $P^{(\Omega)}$, falls sie nicht verschwindet, eine *perfecte* Menge ist.

Man sieht also, dass im vorliegenden Falle der Bestandtheil $U = Pi_1$ von Pi *stets verschwindet* und dass daher Pi sich auf V reducirt; denn, da Pi eine *perfecte* Menge ist, so ist nach Theorem A der Bestandtheil von Pi, welcher in eine Vollkugel fällt, die einen Punct von Pi umgiebt, stets von *höherer* als der *ersten* Mächtigkeit; es kann also *kein* Punct von Pi ein Punct *erster* Ordnung sein.

Daher ist jede *abgeschlossene* Menge *erster* Mächtigkeit eine *separirte* Menge. Je nachdem nun die *abgeschlossene* Menge P von der *ersten* oder von *höherer* Mächtigkeit ist, ergeben sich aus den Theoremen J und L und den auf sie folgenden Resultaten die verschiedenen Behauptungen in Theorem H.

Die im Vorstehenden zu einer Art von Abschluss gelangten Untersuchungen über *Punctmengen* habe ich von Anfang an nicht bloss aus speculativem Interesse, sondern zugleich im Hinblick auf Anwendungen unternommen, welche ich mir davon in der *mathematischen Physik* und in anderen Wissenschaften versprach.

Die *Hypothesen*, welche den meisten theoretischen Untersuchungen über *Naturerscheinungen* zu Grunde gelegt werden, haben mich niemals sehr befriedigt und ich glaubte dies dem Umstande zuschreiben zu müssen, dass die *Theoretiker* zumeist entweder über die *letzten* Elemente der *Materie*

eine völlige Unbestimmtheit herrschen lassen oder dass sie dieselben als sogenannte *Atome* von zwar *sehr kleinem* aber doch *nicht gänzlich verschwindendem Rauminhalte* annehmen. Mir unterlag es keinem Zweifel, dass, um zu einer befriedigenderen *Naturerklärung* zu gelangen, die letzten oder eigentlichen *einfachen* Elemente der Materie in *actual unendlicher Zahl* vorauszusetzen und in Bezug auf das *Räumliche* als *völlig ausdehnungslos* und *streng punctuell* zu betrachten sind; ich wurde in dieser Ansicht bestärkt, indem ich bemerkte, dass in der neueren Zeit so hervorragende *Physiker*, wie FARADAY, AMPÈRE, WILH. WEBER und von *Mathematikern* neben Anderen CAUCHY dieselbe Überzeugung vertreten haben.

Um aber diese *Grundanschauung* zur Durchführung bringen zu können, schienen mir allgemeine Untersuchungen über *Punctmengen*, wie ich sie angestellt habe, vorhergehen zu müssen. Ich nenne im Anschluss an LEIBNIZ die *einfachen* Elemente der Natur, aus deren Zusammensetzung in gewissem Sinne die *Materie* hervorgeht, *Monaden* oder *Einheiten* (man vergleiche namentlich die beiden LEIBNIZ'schen Abhandlungen: »*La Monadologie*», Edit. ERDMANN, p. 705 oder Edit. DUTENS, T. II, p. 20 und »*Principes de la nature et de la grâce, fondés en raison*», Edit. ERDMANN, p. 714 und Edit. DUTENS, T. II, p. 32) und gehe von der Ansicht aus, mit welcher ich mich in Übereinstimmung mit der heutigen Physik zu befinden glaube, dass *zwei specifisch verschiedene, auf einander wirkende Materien* und demgemäss auch *zwei* verschiedene Classen von *Monaden* neben einander zu Grunde zu legen sind, die *Körpermaterie* und die *Aethermaterie*, die *Körpermonaden* und die *Aethermonaden*, indem diese beiden *Substrate* zur *Erklärung* der *bisher beobachteten sinnfälligen Erscheinungen* auszureichen scheinen.

Auf diesem Standpuncte ergiebt sich als die *erste Frage*, woran aber weder LEIBNIZ noch die Späteren gedacht haben, welche *Mächtigkeiten* jenen beiden Materien in Ansehung ihrer Elemente, sofern sie als *Mengen* von *Körper-* resp. *Aethermonaden* zu betrachten sind, zukommen; in dieser Beziehung habe ich mir schon vor Jahren die *Hypothese* gebildet, dass die *Mächtigkeit* der *Körpermaterie* diejenige ist, welche ich in meinen Untersuchungen die *erste* Mächtigkeit nenne, dass dagegen die *Mächtigkeit* der *Aethermaterie* die *zweite* ist.

Für diese Ansicht und Meinung lassen sich *sehr viele* Gründe ins Feld führen, wie ich bei einer späteren Gelegenheit auseinandersetzen will;

nehmen wir sie vorläufig an, so müssen wir uns in jedem *Zeitmoment* die *Körpermaterie* (sei es im ganzen Weltraume G_3, sei es in irgend einem abgegrenzten Theil H_3 derselben) unter dem *Bilde* einer Punctmenge P von der ersten Mächtigkeit, die *Aethermaterie* in demselben Raume unter dem *Bilde* einer *daneben* bestehenden Punctmenge Q von der *zweiten* Mächtigkeit denken, und diese beiden Punctmengen P und Q wären gewissermaassen als Functionen der *Zeit* zu betrachten. Aus den Untersuchungen des § 2 folgt aber, dass:

$$P = Pr + Pi_1,$$

wo Pr die *separirte* Menge ist, welche wir den *Rest* von P genannt und wo Pi_1, wenn sie nicht verschwindet, die *erste Inhärenz* von P, eine *homogene* Punctmenge *erster* Ordnung ist; die *übrigen Inhärenzen* fallen hier fort, weil P die *erste* Mächtigkeit hat. Ebenso haben wir:

$$Q = Qr + Qi_1 + Qi_2$$

da Q von der *zweiten* Mächtigkeit ist und somit *höhere Inhärenzen*, als die *zweite* hier nicht vorkommen.

Es wird sich zunächst darum handeln, zu entscheiden, ob vielleicht den *fünf* wesentlich verschiedenen Bestandtheilen, in welche hiernach die *Körper-* und *Aethermaterie* in jedem Zeitmoment getrennt erscheint und etwa auch den verschiedenen Theilen, in welche Pr und Qr nach (13) zerfallen, auch wesentlich verschiedene *Erscheinungs-* und *Wirkungsweisen* der Materie, wie: *Aggregatzustände, chemische Unterschiede, Licht* und *Wärme, Electricität* und *Magnetismus* entsprechen mögen.

Ich möchte jedoch die Vermuthungen, welche ich in dieser Beziehung habe, nicht früher in bestimmter Form aussprechen, als bis eine genauere Prüfung derselben stattgefunden haben wird.

Halle, d. 29 Jan. 1885.

DIE INTERMEDIÄRE BAHN DES MONDES

VON

HUGO GYLDÉN
in STOCKHOLM.

Vielfältig ist die Theorie der Mondbewegung behandelt worden. Man hat es an den sorgfältigsten und mühevollsten Anstrengungen nicht fehlen lassen, um die Bewegung dieses Himmelskörpers zu erforschen. Seitdem das NEWTON'sche Gesetz als Fundament der Astronomie angenommen worden war, sehen wir die ersten Männer dieser Wissenschaft mit der erwähnten Aufgabe beschäftigt, und man kann wohl sagen, dass ihre Bemühungen von einem grossartigen Erfolge gekrönt waren.

Es ist nicht zu erwarten, dass je eine Bewegungstheorie den Beobachtungen in dem Maasse entsprechen wird, dass Nichts an ihr zu verbessern wäre; aber die Mängel der jetzt vorhandenen analytischen Ausdrücke für die Mondbewegung erscheinen in der That so gering, wenn man sie mit ihren Leistungen vergleicht, dass man diesen in der That eine hohe Bewunderung zollen muss; und wenn auch die Erreichung einer noch grösseren Genauigkeit mit grossen Schwierigkeiten verbunden sein muss, so erscheint sie auf den bereits angebahnten Wegen doch nicht unmöglich.

Wenn aber auch das practische Bedürfniss eine neue Behandlungsweise der Theorie des Mondes nicht nothwendig erheischen sollte, so ist eine solche doch aus andern Gründen in hohem Maasse wünschenswerth. — Die jetzt vorhandenen Ausdrücke für die Coordinaten des Mondes enthalten nehmlich eine überaus grosse Anzahl von Gliedern, grössere und kleinere durch einander, in deren Reihenfolge und sonstiger Beschaffenheit durchaus kein Gesetz zu erkennen ist, wenn man bloss die Thatsache ihres Vorhandenseins berücksichtigt, sich nicht aber die theoretische Grundlage ihrer Herleitung vergegenwärtigt. Die Resultate der bisherigen Untersuchungen über die Mondbewegung haben mit anderen Worten eine

der Anschauung sehr wenig zugängliche Form, obgleich sie zu numerisch richtigen, oder wenigstens nahezu richtigen Ausdrücken geführt haben. Es stellt sich demnach die Frage, ob diese unübersichtliche Form der Ausdrücke, wenn sie auch bei rein numerischen Rechnungen gewisse Vorzüge haben mag, die einzig mögliche sei, oder ob nicht, durch ein tieferes Eindringen in die Natur der Aufgabe, sich andere Formen ergeben werden, durch die man die Resultate mehr concentrirt darstellen kann. Da wir die Bejahung des letzten Theils dieser Frage als überwiegend wahrscheinlich bezeichnen müssen, so haben wir zuzusehen, wie wir die Wege bahnen können, die zu den höheren Formen der Resultate führen sollen.

Man wird zugeben müssen, wenn man sich die Sachlage etwas genauer vergegenwärtigt, dass die Behandlungsweise der in Frage stehenden Aufgabe in mathematischer Hinsicht sehr mangelhaft war. Schon die Grundvorstellung, dass die Bahn des Mondes eine Ellipse mit gestörten Elementen sei, ist keineswegs in der Natur der Sache begründet, obgleich sie bei den grossen Planeten sehr nahe lag. Sie ist, in Hinsicht der Anschauung — nicht als eine erste Annäherung der analytischen Entwicklung betrachtet — der Vorstellung von einem excentrischen Kreise nur sehr wenig überlegen, und zwar nur durch Grössen, die sehr klein sind im Vergleiche zu Gliedern, welche in beiden Hypothesen unberücksichtigt gelassene, Ungleichheiten der Mondbewegung repräsentiren. Dieser Vorstellung entsprechend wurden nun die successiven Annäherungen angeordnet, und mussten auch so angeordnet werden, so lange man an dieser Vorstellung festhielt, trotzdem es sehr bald bemerkt wurde, dass die Bewegung des Mondperigäums in der ersten Annäherung gänzlich entstellt herauskam. Man hat zwar diesen Übelstand in indirecter Weise umgangen, indem man das formelle Resultat der ersten Annäherung sogleich berücksichtigte und somit gewissermaassen zwei Annäherungen zugleich absolvirte. Durch derartige Operationen verlor aber die Entwicklung, wiewohl sie keineswegs an sich unberechtigt war, ihren streng deductiven Character, indem die Form des Resultates durch die erste Annäherung schon bedingt war. Auf diesem Wege kann man nicht erwarten, zu einer höheren, und der Natur der Aufgabe mehr entsprechenden Form des Resultates zu gelangen.

Es ist jedenfalls anzunehmen, dass die vielen Glieder in den Ausdrücken für die Mondbewegung aus Entwicklungen einer geringeren An-

zahl Functionen entstanden sind, obwohl wir bis jetzt nicht diese Functionen selbst, sondern bloss ihre Entwicklungen gefunden haben. Selbstverständlich müssen diese Functionen desto complicirter erscheinen, je geringer ihre Anzahl ist. Eine einzige Function, aus der man durch algebraische Operationen, Differentiationen oder Quadraturen die verschiedenen, in der Mondbewegung vorkommenden Glieder entwickeln könnte, müsste als dermaassen complicirt gedacht werden, dass wir vor der Hand gar keine Aussicht haben, sie zu erkennen. Unser Ziel dürfen wir daher nicht etwa mit der Erforschung einer solchen Function identificiren; wir müssen uns mit einer mässigeren Reduction bescheiden. Andererseits aber werden wir die Fortschritte in der Erkenntniss der Mondbewegung desto höher schätzen müssen, je mehr es uns gelingt Gliedercomplexe als durch Entwicklung uns bekannter Functionen entstanden angeben zu können; oder, je mehr wir Gliedercomplexe, und namentlich solche, worin grosse Coefficienten vorkommen, durch Functionen darstellen können, deren Eigenschaften uns bekannt oder leicht zu untersuchen sind; oder endlich, um die Sache kurz auszudrücken, eine je elegantere Form der Lösung wir gewinnen können. Der Forderung nach mathematischer Eleganz liegt in der That auch ein tieferes erkenntnisstheoretisches Bedürfniss zu Grunde, als gewöhnlich zugegeben wird.

Die vorliegende Abhandlung bezweckt, die Resultate eines ersten Schrittes in der angedeuteten Richtung darzulegen. Hierbei hatte ich mir die Aufgabe gestellt, eine intermediäre Bahn des Mondes von der Beschaffenheit zu bestimmen, dass die Unterschiede der, in dieser Bahn berechneten Coordinaten und der wahren (welche Unterschiede ich Störungen der intermediären Coordinaten nennen werde) stets kleine Grössen seien, deren Quadrate und Producte man mit sehr wenigen Ausnahmen übergehen dürfe. — Die Bewegung der Bahnebene habe ich dabei unberücksichtigt gelassen, da sie nur einen sehr untergeordneten Einfluss auf die Bewegung des Mondes in der Bahnebene selbst ausübt, und es besonders auf diese Bewegung ankommt, weil sie der Untersuchung die meisten Schwierigkeiten entgegenstellt. Dessgleichen habe ich die s. g. Secularänderung der mittleren Länge nicht in den Kreis dieser Untersuchungen gezogen. Die Schwierigkeiten sie zu bestimmen, sowie die aus den Planetenanziehungen herrührenden Ungleichheiten, sind ganz anderer Art, als diejenigen, welche ich in der vorliegenden Untersuchung zu überwinden gesucht habe.

Man wird finden, dass die Ausdrücke, durch welche die intermediären Coordinaten dargestellt werden, sich wesentlich auf solche Functionen zurückführen lassen, durch die Herr Hermite die Lamé'sche Differentialgleichung integrirt hat. Die vorliegende Untersuchung wird sich daher als eine Anwendung der Resultate des berühmten Verfassers von *Quelques applications des fonctions elliptiques* herausstellen, und ich kann nicht umhin, dieser Leistung meine grosse Bewunderung hier auszusprechen. — Die Einsetzung numerischer Werthe in die algebraischen Ausdrücke ist mit grosser Leichtigkeit auszuführen. Es genügt in diesen Vorbemerkungen der Thatsache zu erwähnen, dass die Bewegung des Mondperigäums in der ersten Annäherung bis auf $\frac{1}{15}$ des Betrages richtig gefunden wurde, während bei der früheren Anordnung der Annäherungen, die erste derselben nur etwa die Hälfte des Betrages ergeben kann. In entsprechend günstiger Weise ergeben sich die übrigen grossen Gleichungen der Mondbewegung, wesshalb ich nicht in der Meinung zu irren glaube, dass die Theorie der Mondbewegung, die bisher als eine der schwierigeren Aufgaben der theoretischen Astronomie angesehen wurde, gegenwärtig zu den leichteren zu zählen sind.

Die numerischen Resultate, welche dieser Abhandlung beigefügt sind, wurden grösstentheils von Herrn A. Shdanow berechnet, wofür ich ihm hier meine besondere Dankbarkeit ausspreche.

1.

Die rechtwinkligen Coordinaten des Mondes, bezogen auf den Schwerpunkt der Erde und auf eine, durch den Radius-vector und der Tangente gelegte Ebene, seien x und y; die Massen der Sonne, der Erde und des Mondes: respective M, 1 und m; indem wir nun unter l^2 eine Constante verstehen, deren Werth von der Einheit der Zeit und der Entfernung abhängt, stellen wir die Bezeichnungen

$$\mu_1 = l^2(1 + m)$$
$$\mu' = l^2M$$

fest.

Nennen wir noch den Radius-vector r, und die Störungsfunction (Ω), so sind die Gleichungen, in deren Integration unsere Aufgabe besteht, die folgenden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu_1 x}{r^3} = \frac{\partial(\Omega)}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu_1 y}{r^3} = \frac{\partial(\Omega)}{\partial y}$$

Zunächst werde ich aus diesen andere Gleichungen herleiten, die als gesuchte Grössen die intermediären Coordinaten des Mondes enthalten sollen. Diese bezeichne ich durch x_0 und y_0, und stelle vor Allem die Bedingungen fest:

$$\frac{x_0}{x} = \frac{y_0}{y} = 1 + \psi, \tag{1}$$

wo ψ eine Function bedeutet, die wir als eine sehr kleine Grösse ansehen, und als Störung der intermediären Coordinaten bezeichnen. Die reducirte Zeit τ definiren wir durch die Gleichung

$$dt = \frac{1 + S}{(1 + \psi)^2} d\tau, \tag{2}$$

wo S eine Grösse von derselben Ordnung wie ψ bezeichnet.

Wenn nun x_0, y_0 und τ statt x, y, t in die ursprünglichen Gleichungen eingeführt werden, so erhalten wir

$$\text{(3)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{dx_0}{d\tau} + \left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\}\frac{x_0}{1+\psi} \\ &\qquad = \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3}\frac{\partial(\Omega)}{\partial x} \\ &\frac{d^2y_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{dy_0}{d\tau} + \left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\}\frac{y_0}{1+\psi} \\ &\qquad = \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^3}\frac{\partial(\Omega)}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

in denen wir uns der Bezeichnung

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = r(1 + \psi)$$

bedient haben. Es bedeutet also r_0 den intermediären Radius-vector.

Wenn die wahre Länge des Mondes in der Bahnebene durch v bezeichnet wird, so gelten die Ausdrücke:

$$x = r \cos v, \qquad y = r \sin v;$$

vermöge der Gleichungen (1) haben wir daher auch:

$$x_0 = r_0 \cos v, \qquad y_0 = r_0 \sin v,$$

woraus gefolgert wird:

$$x_0 \frac{dy_0}{d\tau} - y_0 \frac{dx_0}{d\tau} = r_0^2 \frac{dv}{d\tau}$$

Aus den Gleichungen (3) bilden wir nun zunächst die folgende:

$$x_0 \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} - y_0 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1 + S} \frac{dS}{d\tau} \left(x_0 \frac{dy_0}{d\tau} - y_0 \frac{dx_0}{d\tau} \right) = \frac{(1 + S)^2}{(1 + \psi)^3} \left\{ x_0 \frac{\partial(\Omega)}{\partial y} - y_0 \frac{\partial(\Omega)}{\partial x} \right\}$$

$$= \frac{(1 + S)^2}{(1 + \psi)^2} \left\{ x \frac{\partial(\Omega)}{\partial y} - y \frac{\partial(\Omega)}{\partial x} \right\}$$

$$= \frac{(1 + S)^2}{(1 + \psi)^2} \frac{\partial(\Omega)}{\partial v};$$

und das Integral derselben können wir in der nachstehenden Form angeben:

$$r_0^2 \frac{dv}{d\tau} = (1 + S) \left\{ \sqrt{c} + \int \frac{1 + S}{(1 + \psi)^2} \frac{\partial(\Omega)}{\partial v} d\tau \right\}, \tag{4}$$

wobei $\sqrt{c}$ die Integrationsconstante bezeichnet.

Wir setzen hierauf:

$$v = v_0 + \chi, \tag{5}$$

und bestimmen die intermediäre Länge v_0 aus der Gleichung:

$$\frac{dv_0}{d\tau} = \frac{\sqrt{c}}{r_0^2} \tag{6}$$

Hiermit erhalten wir:

$$\sqrt{c} + r_0^2 \frac{d\chi}{d\tau} = (1 + S)\left\{\sqrt{c} + \int \frac{1 + S}{(1 + \psi)^2} \frac{\partial(\Omega)}{\partial v} d\tau\right\}$$

oder

$$1 + \frac{d\chi}{dv_0} = (1 + S)\left\{1 + \int (1 + S) \frac{r^2}{c} \frac{\partial(\Omega)}{\partial v} dv_0\right\}$$

Die Glieder, welche in $\frac{r^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial v}$ vorkommen, theilen wir in zwei Gruppen: Q_0 und Q_1, indem wir setzen

$$(1 + S)\frac{r^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial v} = (1 + S) Q_0 + Q_1$$

und bestimmen hierauf χ aus der Gleichung:

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = Q_0, \tag{7}$$

wonach wir zur Bestimmung von S die Gleichung

$$\frac{dS}{dv_0}\left[1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right] + (2S + S^2)(Q_0 + Q_1) = -Q_1 \tag{8}$$

zurück behalten.

Das Integral dieser Gleichung können wir, wie man leicht bemerkt, näherungsweise schreiben

$$S = -\frac{\int Q_1\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right) dv_0}{\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right)^2}, \tag{9}$$

wobei keine Integrationsconstante hinzugefügt zu werden braucht, indem sie als in χ oder in c enthalten gedacht werden kann.

Aus den Gleichungen (3) erhalten wir ferner:

$$x_0 \frac{d^2x_0}{d\tau^2} + y_0 \frac{d^2y_0}{d\tau^2} - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\left\{x_0 \frac{dx_0}{d\tau} + y_0 \frac{dy_0}{d\tau}\right\}$$

$$+ \frac{r_0^2}{1+\psi}\left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1(1+S)^2}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\}$$

$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\left(x\frac{\partial(\Omega)}{\partial x} + y\frac{\partial(\Omega)}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2} r \frac{\partial(\Omega)}{\partial r}$$

Da aber:

$$x_0 \frac{d^2x_0}{d\tau^2} + y_0 \frac{d^2y_0}{d\tau^2} = r_0 \frac{d^2r_0}{d\tau^2} + \left(\frac{dr_0}{d\tau}\right)^2 + \left\{\left(\frac{dx_0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{d\tau}\right)^2\right\}$$

$$= r_0 \frac{d^2r_0}{d\tau^2} - r_0^2\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2,$$

so finden wir aus der vorhergehenden Gleichung:

$$r_0 \frac{d^2r_0}{d\tau^2} - r_0^2\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau} r_0 \frac{dr_0}{d\tau}$$

$$+ \frac{r_0^2}{1+\psi}\left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1(1+S)}{r_0^3} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\} = \frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2} r \frac{\partial(\Omega)}{\partial r}$$

In diesem Resultate haben wir sowohl τ durch die Veränderliche v_0, als auch v durch $v_0 + \chi$ zu ersetzen. Wir beachten dabei, dass

$$\frac{dr_0}{d\tau} = -r_0^2 \frac{d\frac{1}{r_0}}{d\tau} = -\sqrt{c}\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}$$

$$\frac{d^2r_0}{d\tau^2} = -\frac{c}{r_0^2}\frac{d^2\frac{1}{r_0}}{dv_0^2},$$

und erhalten demzufolge zunächst:

$$-\frac{d^2\frac{1}{r_0}}{dv_0^2}-\frac{1}{r_0}\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}+\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}$$

$$+\frac{r_0^3}{c(1+\psi)}\left\{-\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+\frac{\mu_1(1+S)^2}{r_0^3}+\frac{1}{1+S}\frac{dS}{d\tau}\frac{d\psi}{d\tau}\right\}=\frac{(1+S)^2}{(1+\psi)^2}\frac{r_0 r}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r}$$

und ferner, weil:

$$\frac{d\psi}{d\tau}=\frac{\sqrt{c}}{r_0^2}\frac{d\psi}{dv_0}, \qquad \frac{d^2\psi}{d\tau^2}=\frac{c}{r_0^4}\frac{d^2\psi}{dv_0^2}+\frac{2c}{r_0^3}\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0},$$

die Gleichung:

$$-\frac{d^2\frac{1}{r_0}}{dv_0^2}-\frac{1}{r_0}\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}+\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}+\frac{\mu_1}{c}(1+S)^2$$

$$+\frac{1}{1+\psi}\left\{-\frac{1}{r_0}\frac{d^2\psi}{dv_0^2}-\frac{\mu_1}{c}(1+S)^2\psi-2\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}+\frac{1}{r_0(1+S)}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}\right\}$$

$$=\frac{(1+S)^2}{1+\psi}\frac{r^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r}$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit einem, vorläufig noch unbestimmten constanten Factor a, und zerlegen dabei die Glieder des Productes $\frac{ar^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r}$ in zwei Gruppen P_0 und P_1, so dass die Gleichung

$$\frac{ar^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r}=P_0+P_1$$

zu Geltung kommt; hierauf stellen wir folgende Bedingung auf:

$$\frac{d^2\frac{a}{r_0}}{dv_0^2}+\frac{a}{r_0}\left\{1+2\frac{d\chi}{dv_0}+\left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}-\frac{\mu_1 a}{c}=-P_0, \tag{10}$$

und erhalten endlich als Bestimmungsgleichung für ψ die nachstehende:

$$a\frac{d^2\psi}{dv_0^2} + \frac{a\mu_1}{c}(1 + S)^2 r_0\psi - \frac{1+\psi}{1+S} r_0 \frac{dS}{dv_0}\frac{d\frac{a}{r_0}}{dv_0}$$

$$-\frac{a\mu_1}{c}(1+\psi)r_0(2S+S^2) + 2r_0\frac{d\frac{a}{r_0}}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0} - \frac{a}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\psi}{dv_0}$$
$$= -(1+S)^2 r_0 P_1 - (2S + S^2 - \psi) r_0 P_0$$

Dieses Resultat gestaltet sich jedoch für spätere Anwendungen zweckmässiger, wenn man statt ψ eine neue Function ξ einführt, die mit ersterer durch die Gleichung

$$a\psi = r_0\xi \tag{11}$$

verbunden ist. Man findet dabei die Beziehungen:

$$a\frac{d\psi}{dv_0} = r_0\frac{d\xi}{dv_0} - r_0^2\xi\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0},$$

$$a\frac{d^2\psi}{dv_0^2} = r_0\frac{d^2\xi}{dv_0^2} - 2r_0^2\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}\frac{d\xi}{dv_0} - \xi\left\{r_0^2\frac{d^2\frac{1}{r_0}}{dv_0^2} - 2r_0^3\left(\frac{d\frac{1}{r_0}}{dv_0}\right)^2\right\};$$

und hiermit geht die vorstehende Differentialgleichung in die folgende über:

$$\frac{d^2\xi}{dv_0^2} - \frac{r_0}{a}\left\{\frac{d^2\frac{a}{r_0}}{dv_0^2} - \frac{a\mu_1}{c}\right\}\xi - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\xi}{dv_0}$$

$$-\frac{a\mu_1}{c}(2S+S^2) - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\frac{a}{r_0}}{dv_0} = -(1+S)^2P_1 - \left(2S + S^2 - \frac{r_0}{a}\xi\right)P_0$$

Ersetzt man aber den Coefficienten des zweiten Gliedes linker Hand durch seinen Werth aus der Gleichung (10), so erlangt man:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dv_0^2} + \left\{1 + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}\xi - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\xi}{dv_0}\\ &-\frac{a\mu_1}{c}(2S+S^2) - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\frac{a}{r_0}}{dv_0} = -P_1 - (2S+S^2)(P_1+P_0)\end{aligned} \tag{12}$$

Durch die Integration der Gleichungen (7) und (10) wird die intermediäre Bahn bestimmt; die Gleichungen (8) und (12) bestimmen hingegen die Störungen.

2.

In der Mondtheorie sind sehr wenige Glieder aus der Hauptentwicklung der Störungsfunction hinreichend um als Grundlage einer intermediären Bahn zu dienen, die nur sehr wenig von der wirklichen abweicht. Diese Glieder sind aus folgendem Ausdrucke zu entnehmen:

$$(\Omega) = \mu'\left\{\frac{1}{r'} + \frac{1}{4}\frac{r^2}{r'^3} + \frac{3}{4}\frac{r^2}{r'^3}\cos 2H\right\}$$

Es bedeutet hier: r' der Radius-vector der Sonne und H der Winkel zwischen den Radien-vectoren der Sonne und des Mondes. Hieraus erhalten wir:

$$\frac{r^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial v} = \frac{3}{4}\frac{\mu'}{c}\frac{r^4}{r'^3}\frac{\partial\cos 2H}{\partial v}$$

$$\frac{ar^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{a\mu'}{c}\left(\frac{r}{r'}\right)^3 + \frac{3}{2}\frac{a\mu'}{c}\left(\frac{r}{r'}\right)^3\cos 2H$$

Mit diesen Ausdrücken werden wir einige wesentliche Vereinfachungen vornehmen können, indem wir immer festhalten, nur die grössten, und für die Bewegung des Mondes characteristischen Glieder herauszuheben.

Zunächst vernachlässigen wir das Quadrat der Neigung der Mondbahn über die Ekliptik; wir haben alsdann einfach, indem v' die wahre Länge der Sonne bezeichnet:

$$H = v - v'$$

Ferner bezeichnen wir die mittleren Bewegungen des Mondes und der Sonne mit n und n', und das Verhältniss beider mit μ, so dass:

$$\frac{n}{n'} = \mu$$

Die mittleren Längen beider Himmelskörper zu einer bestimmten Zeitepoche seien Λ und Λ'; in der Relation:

$$v' - \Lambda' = \mu(v_0 - \Lambda) + G$$

bedeutet alsdann G eine kleine Grösse von der Ordnung der Excentriciteten. Um die folgende Darstellung möglichst zu vereinfachen, werde ich G zunächst vernachlässigen, was geschehen darf, erstens weil ihr Einfluss überhaupt gering ist, zweitens aber weil derselbe leicht später zu berücksichtigen ist, ohne dass das Wesen der befolgten Methode irgendwie abgeändert wird.

Wir nehmen nun an, dass die vorhin eingeführte Constante a die mittlere Entfernung des Mondes von dem Schwerpunkt der Erde bezeichne; die Veränderliche r_0 ersetzen wir nach dieser Voraussetzung durch eine neue ρ_0, indem wir die Relation

$$r_0 = \frac{ap}{1 + \rho_0} \tag{13}$$

aufstellen, und dabei unter p eine zu unserer Verfügung stehende Constante bezeichnen. Dieser Werth von r_0, in die Gleichung (10) eingeführt, giebt uns:

$$\frac{1}{p}\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \frac{1+\rho_0}{p}\left\{1 + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\} - \frac{\mu_1 a}{c} = -P_0;$$

und wenn wir die Constante p aus der Gleichung

$$\frac{1}{p} - \frac{\mu_1 a}{c} = 0$$

bestimmen, so erhalten wir:

$$\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \left\{1 + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}\rho_0 = -2\frac{d\chi}{dv_0} - \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 - pP_0 \tag{14}$$

Bei der Mondbahn ist nun ρ_0 immer eine ziemlich kleine Grösse; eine Folge dieses Umstandes ist, dass p von der Einheit um eine sehr kleine Grösse verschieden ist, dessen Product mit der Sonneneinwirkung wir bei der intermediären Bahn vernachlässigen werden. Dass $p - 1$

eine Grösse zweiter Ordnung in Bezug auf den Modul von ρ_0 ist, kann man übrigens leicht nachweisen.

Es seien $+e$ und $-e$ die extremen Werthe von ρ_0; die entsprechenden Werthe von r_0 sind dabei

$$r_1 = \frac{ap}{1+e}; \qquad r_2 = \frac{ap}{1-e};$$

soll nun die Gleichung

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = a$$

bestehen, welche unserer Annahme, dass a die mittlere Entfernung bedeutet, entspricht, wenigstens in einem gewissen Sinne, so muss p den Werth $1 - e^2$ haben. Im Allgemeinen werden aber die absoluten Beträge der extremen Werthe von ρ_0 nicht dieselben sein; der Ausdruck für p muss sich daher auch in der Regel etwas anders gestalten, und zwar findet man

$$p = \frac{1 + e_1 - e_2 - e_1 e_2}{1 + \frac{e_1 - e_2}{2}}$$

wenn ρ_0 zwischen den Grenzen $+e_1$ und $-e_2$ variirt. Formell genommen, ist allerdings die Differenz $e_1 - e_2$ als eine Grösse erster Ordnung anzusehen, allein in thatsächlich vorkommenden Fällen, insbesondere bei der Bahn des Mondes ist diese Differenz doch so viel kleiner als e_1 und e_2, dass sie als eine Grösse zweiter Ordnung angesehen werden muss.

Es kann aber die Constante a auch in anderer Weise definirt werden als durch das arithmetische Mittel der extremen Werthe von r_0, und in der That scheint auch eine andere Definition dieser Grösse bei der Mondbahn wesentliche Vorzüge zu haben.

Wir nehmen nun wieder die Gleichung (6) vor, drücken in derselben die Function r_0 durch ρ_0 aus, und ersetzen die Grösse c durch ihren Werth

$$c = \mu_1 a p$$

Wenn wir endlich den, bei dieser Untersuchung zu befolgenden Principien gemäss, die eigentlichen Störungen vernachlässigen, d. h. hier, die reducirte

Zeit mit der wahren identificiren, so haben wir aus der betreffenden Gleichung:

$$(15) \qquad \frac{p^{\frac{3}{2}} dv_0}{(1+\rho_0)^2} = \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{\frac{3}{2}}} dt$$

Die Entwicklung der Grösse linker Hand wird nun, vorausgesetzt, dass ρ_0 schon bekannt ist, ausser zu rein periodischen Gliedern, zu einem, nur in dv_0 multiplicirten Gliede Veranlassung geben, dessen Coefficienten wir, durch eine passende Bestimmung der Grösse p, zu 1 machen können. Durch eine solche Bestimmung wird der Coefficient von dt die Bedeutung der mittleren Bewegung des Mondes erhalten, d. h. die Gleichung

$$n = \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

zu Geltung bringen. Die Grösse a verliert aber dabei die Bedeutung der mittleren Entfernung in irgend welchem geometrischen Sinne, und ist nur als Maass oder Modul der Entfernungen anzusehen.

Für die Sonne können wir eine, mit der Gleichung (15) ganz analoge ansetzen, nehmlich

$$\frac{p'^{\frac{3}{2}} dv'_0}{(1+\rho'_0)^2} = n' dt,$$

in welcher selbstverständlich alle mit Accenten versehenen Grössen dieselbe Bedeutung in Bezug auf die Sonnenbahn haben, wie die unaccentuirten Grössen in Bezug auf die Mondbahn, und in's Besondere hat man

$$n' = \frac{\sqrt{\mu'_1}}{a'^{\frac{3}{2}}}$$

und wenn man die Erdmasse neben der Sonnenmasse, wie es hier unbedenklich geschehen kann, vernachlässigt, so darf man in dieser Formel μ' statt μ'_1 setzen. — Durch Vergleichung der beiden Werthe von dt erhält man nun:

$$\frac{dv'_0}{dv_0} = \mu \left(\frac{p}{p'_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1+\rho'_0}{1+\rho_0}\right)^2,$$

und überdies:

$$\frac{\mu'}{\mu_1}\left(\frac{a}{a'}\right)^3 = \mu^2$$

Indem man sich nun bloss die rein periodischen Glieder in ρ_0 und ρ'_0 berücksichtigt denkt, kann man also die Gleichung

$$dv'_0 = \mu(1 + 2\rho'_0 - 2\rho_0 + \ldots)dv_0$$

ansetzen, und findet hiermit als Ausdruck für die oben mit G bezeichnete Function die Formel

$$G = 2\mu\int\rho'_0 dv_0 - 2\mu\int\rho_0 dv_0 \tag{16}$$

3.

Unter Berücksichtigung der Werthe, welche wir für c, r_0 und r'_0 gefunden oder angenommen haben, ergeben sich für die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction die nachstehenden Ausdrücke, in denen wir die Störungen sowie die Function G vernachlässigt, und also auch v' mit v'_0 identificirt haben,

$$\frac{r^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial v} = -\frac{3}{2}\mu^2\frac{(1+\rho'_0)^3}{(1+\rho_0)^4}\sin 2[(1-\mu)v_0 + \chi - A' + \mu A]$$

$$\frac{ar^2}{c}\frac{\partial(\Omega)}{\partial r} = \frac{1}{2}\mu^2\left(\frac{1+\rho'_0}{1+\rho_0}\right)^3 + \frac{3}{2}\mu^2\left(\frac{1+\rho'_0}{1+\rho_0}\right)^3\cos 2[(1-\mu)v_0 + \chi - A' + \mu A]$$

Diese Ausdrücke werden wir nun nach den steigenden Potenzen von ρ_0 und ρ'_0 entwickeln und dabei nur die Glieder erster Ordnung beibehalten. Die folgenden Glieder sind zwar nicht unmerklich, üben aber doch auf die Resultate, welche wir bei der vorliegenden Untersuchung im Auge haben, einen ganz unwesentlichen Einfluss aus. Wir erhalten also, indem wir uns noch der Bezeichnung

$$\beta_1 = \frac{3}{2}\mu^2$$

bedienen, die nachstehenden Ausdrücke, mit denen wir die Grössen Q_0 und P_0 identificiren,

$$Q_0 = -\beta_1(1 - 4\rho_0 + 3\rho_0')\sin 2[(1-\mu)v_0 + \chi - \Lambda' + \mu\Lambda]$$

$$P_0 = \frac{1}{3}\beta_1(1 - 3\rho_0 + 3\rho_0')$$
$$+ \beta_1(1 - 3\rho_0 + 3\rho_0')\cos 2[(1-\mu)v_0 + \chi - \Lambda' + \mu\Lambda]$$

Die Gleichungen (7) und (10) nehmen nun die nachstehenden Formen an, wobei wir der Kürze wegen

$$\lambda = 2(1-\mu)$$

$$A = 2(\Lambda' - \mu\Lambda)$$

gesetzt haben,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = -\beta_1(1 - 4\rho_0 + 3\rho_0')\sin(\lambda v_0 + 2\chi - A) \\ &\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \left\{1 - \beta_1 - 3\beta_1\cos(\lambda v_0 + 2\chi - A) + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}\rho_0 \\ &= -\frac{1}{3}\beta_1 - \beta_1\rho_0' - \beta_1\cos(\lambda v_0 + 2\chi - A) - 3\beta_1\rho_0'\cos(\lambda v_0 + 2\chi - A) \\ &\qquad - 2\frac{d\chi}{dv_0} - \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 \end{aligned}\right.$$

Dieses System lässt sich zwar nur durch fortgesetzte Annäherungen integriren; man kann diese aber so anordnen, dass die Convergenz eine äusserst rapide wird. Ich muss es mir versagen, jetzt alle zu diesem Zwecke dienlichen Hülfsmittel in Anwendung zu bringen, die mir zu Gebote stehen; theils würde ihre Darlegung zu viel Platz in Anspruch nehmen, theils gelangt man auch ohne dieselben bei der Mondtheorie leicht genug zum Ziele. Ich will nur beiläufig bemerken, dass dieses Hülfsmittel in der Anwendung eines veränderlichen Moduls der elliptischen Functionen seine Wurzel hat.

Einen für die Bewirkung einer hinreichend starken Convergenz genügenden Ausgangspunkt erhält man, wie ich mich durch numerisches

Nachrechnen überzeugt habe, wenn in der ersten Gleichung des Systems (17) die Function χ in den Argumenten der trigonometrischen Functionen vernachlässigt wird. Es ergiebt sich alsdann:

$$\frac{d\chi}{dv_0} = \frac{\beta_1}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A) + 4\beta_1\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0 - 3\beta_1\int\rho_0'\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0,$$

aber die Form dieses Resultates ist für unsern Zwecke nicht die erwünschte, indem die unbekannte Grösse ρ_0 unter einem Integralzeichen vorkommt. Die Umgestaltung, welche hier nöthig wäre, können wir indessen aufschieben bis der angesetzte Werth von $\frac{d\chi}{dv_0}$ in die zweite der Gleichungen (17) eingeführt worden ist; denn erst bei ihrer Integration kommt es uns darauf an, eine Form zu erhalten, in welcher die in ρ_0 multiplicirten Glieder, oder wenigstens die einflussreichsten derselben von dem Integralzeichen befreit sind.

Aus der erwähnten Gleichung findet sich, mit Hülfe des angegebenen Werthes von $\frac{d\chi}{dv_0}$ die nachstehende

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \left\{1 - \beta_1 + \frac{1}{2}\frac{\beta_1^2}{\lambda^2} - \left(3\beta_1 - \frac{2\beta_1}{\lambda}\right)\cos(\lambda v_0 - A)\right\}\rho_0 \\
= -8\beta_1\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0 - \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{2}\frac{\beta_1^2}{\lambda^2} \\
-\left(\beta_1 + \frac{2\beta_1}{\lambda}\right)\cos(\lambda v_0 - A) \\
-3\beta_1\rho_0'\cos(\lambda v_0 - A) - \beta_1\rho_0' \\
-8\beta_1\rho_0\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0 \\
+\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

wo schon das letzte Glied rechter Hand, und noch mehr die übergangenen bei der vorliegenden Untersuchung unwesentlich sind.

Um grössere Kürze bei der Darstellung zu bewirken, führe ich nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\beta_0 = \beta_1 - \frac{1}{2}\frac{\beta_1^2}{\lambda^2}$$

$$\beta = 3\beta_1 - 2\frac{\beta_1}{\lambda}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{2}\frac{\beta_1^2}{\lambda^2}$$

$$\gamma_1 = \beta_1 + 2\frac{\beta_1}{\lambda},$$

und erhalte hierauf:

(18)
$$\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \{1 - \beta_0 - \beta\cos(\lambda v_0 - A)\}\rho_0$$
$$= -8\beta_1\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)dv_0 - \gamma_0 - \beta_1\rho_0' - \gamma_1\cos(\lambda v_0 - A) + \ldots$$

Das wesentlichste Glied rechter Hand ist das erste, und eben dieses muss transformirt werden. Wenn wir die Summe aller übrigen Glieder kurzweg mit W_1 bezeichnen, also die Gleichung

(19) $$W_1 = -\gamma_1 - \beta_1\rho_0' - \gamma_1\cos(\lambda v_0 - A) - 3\beta_1\rho_0'\cos(\lambda v_0 - A) - \ldots$$

aufstellen, so haben wir

$$\rho_0 = -\frac{1}{1-\beta_0}\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \frac{\beta}{1-\beta_0}\rho_0\cos(\lambda v_0 - A)$$
$$+ \frac{W_1}{1-\beta_0} - \frac{8\beta_1}{1-\beta_0}\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)dv_0,$$

und dieser Werth von ρ_0 soll in das zu transformirende Glied eingesetzt werden. Wir erhalten dadurch:

$$\int\rho_0\,\mathrm{Sin}(\lambda v_0 - A)dv_0 = -\frac{1}{1-\beta_0}\int\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2}\sin(\lambda v_0 - A)dv_0$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\beta}{1-\beta_0}\int\rho_0\sin 2(\lambda v_0 - A)dv_0$$
$$+ \frac{1}{1-\beta_0}\int W_1\sin(\lambda v_0 - A)dv_0$$
$$- \frac{8\beta_1}{1-\beta_0}\int\sin(\lambda v_0 - A)dv_0\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)dv_0$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{d^2\rho_0}{dv_0^2}\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0 = \frac{d\rho_0}{dv_0}\sin(\lambda v_0 - A) - \lambda\rho_0\cos(\lambda v_0 - A) - \lambda^2\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0$$

$$\int \sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0 \int \rho_0\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0 + \frac{1}{2\lambda}\int\rho_0\sin 2(\lambda v_0 - A)\,dv_0,$$

welche Ausdrücke, in der vorhergehenden Formel eingeführt, zu der nachstehenden führen:

$$\begin{aligned}(\lambda^2 + \beta_0 - 1)\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0 = {} & \frac{d\rho_0}{dv_0}\sin(\lambda v_0 - A) - \lambda\rho_0\cos(\lambda v_0 - A)\\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{8\beta_1}{\lambda} - \beta\right)\int\rho_0\sin 2(\lambda v_0 - A)\,dv_0\\ & - \frac{8\beta_1}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0\\ & - \int W_1\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0\end{aligned}$$

Indem wir nun diesen Werth in die Gleichung (18) substituiren, bedienen wir uns der nachstehenden Bezeichnungen:

$$\eta_0 = \lambda^2 + \beta_0 - 1$$

$$\eta_1 = \frac{8\beta_1}{\lambda\eta_0}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2\eta_0}\left(\frac{8\beta_1}{\lambda} - \beta\right);$$

unser Resultat ist alsdann das folgende:

$$(20) \qquad \frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \frac{\lambda\eta_1 \sin(\lambda v_0 - A)}{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} \frac{d\rho_0}{dv_0}$$

$$+ \left\{ 1 - \beta_0 - \beta \cos(\lambda v_0 - A) - \frac{\eta_1 \lambda^2 \cos(\lambda v_0 - A)}{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} \right\} \rho_0$$

$$= - \frac{8\eta_2\beta_1}{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} \int \rho_0 \sin 2(\lambda v_0 - A) dv_0$$

$$+ \frac{\eta_1 \lambda}{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} \int W_1 \sin(\lambda v_0 - A) dv_0$$

$$+ W_1$$

Die mit Integralzeichen behafteten Glieder dieser Gleichung gehören der zweiten Ordnung in Bezug auf die Grösse μ^2 an. Sie sind daher sehr klein, und da sie weder durch die Ausführung der bezeichneten Integrationen, noch durch die Integration der Differentialgleichung wesentlich vergrössert werden, so haben sie hier kein Interesse und können daher vernachlässigt, oder mit anderen, aus ähnlichen Gründen bei Seite gelassenen Gliedern als vereinigt gedacht werden.

Nach dieser Vernachlässigung werden wir die Gleichung (20) noch dadurch vereinfachen, dass wir in derselben das zweite Glied wegschaffen, was dadurch bewerkstelligt werden kann, dass wir die Function ρ_0 durch eine andere E ersetzen, die mit der früheren durch die Gleichung

$$(21) \qquad \rho_0 = E\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)}$$

verbunden ist. Es findet sich hieraus:

$$\frac{d\rho_0}{dv_0} = \frac{dE}{dv_0} \sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} - \frac{1}{2} E \frac{\eta_1 \lambda \sin(\lambda v_0 - A)}{\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)}}$$

$$\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} = \frac{d^2E}{dv_0^2} \sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)} - \frac{dE}{dv_0} \frac{\eta_1 \lambda \sin(\lambda v_0 - A)}{\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)}}$$

$$- \frac{1}{2} E \left\{ \frac{\eta_1 \lambda^2 \cos(\lambda v_0 - A)}{\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)}} + \frac{1}{2} \frac{\eta_1^2 \lambda^2 \sin(\lambda v_0 - A)^2}{[1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

mit welchen Werthen man aus der Gleichung (20) die nachstehende erhält

$$\begin{aligned}(22)\qquad \frac{d^2E}{dv_0^2} + \Bigg\{ 1 - \beta_0 - \beta\cos(\lambda v_0 - A) - \frac{3}{2}\,\frac{\eta_1\lambda^2\cos(\lambda v_0 - A)}{1 + \eta_1\cos(\lambda v_0 - A)} \\ - \frac{3}{4}\,\frac{\eta_1^2\lambda^2\sin(\lambda v_0 - A)^2}{[1 + \eta_1\cos(\lambda v_0 - A)]^2}\Bigg\} E \\ = \frac{W_1}{\sqrt{1 + \eta_1\cos(\lambda v_0 - A)}}\end{aligned}$$

In dieser Gleichung werden wir nun auch mehrere Glieder höherer Ordnung in Bezug auf μ^2 von der linken auf die rechte Seite hinüberführen. Indem wir also unter W_2 eine Grösse verstehen, welche mit E multiplicirt ist und also bei der ersten Annäherung nicht berücksichtigt werden kann, jedenfalls aber zweiter Ordnung in Bezug auf μ^2 ist, und indem wir die Bezeichnungen:

$$\overline{\beta}_0 = \beta_0 - \frac{3}{8}\eta_1^2\lambda^2$$

$$\overline{\beta} = \beta + \frac{3}{2}\eta_1\lambda^2$$

feststellen, erhalten wir:

$$(23)\qquad \frac{d^2E}{dv_0^2} + \{1 - \overline{\beta}_0 - \overline{\beta}\cos(\lambda v_0 - A)\} E = \frac{W_1}{\sqrt{1 + \eta_1\cos(\lambda v_0 - A)}} + W_2$$

4.

Auf die Integration der zuletzt gefundenen Differentialgleichung werden wir nun unsere Aufmerksamkeit richten müssen, und zwar werde ich dabei die Integrationsmethode in Anwendung bringen, die ich schon in der ersten Abhandlung über die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper vorgeschlagen habe. Eine geringe Abänderung werde ich zwar dabei vornehmen, welche jedoch zu unwesentlich ist um hier einer besonderen Erwähnung zu bedürfen.

In der in Frage stehenden Gleichung setze ist:

$$\lambda v_0 - A = 2\frac{\pi}{2K}x - 180^0,$$

wo K ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung bezeichnet, dessen Modul vorläufig unbestimmt gelassen wird. Bezeichnet man nun der Kürze wegen:

$$\frac{W_1}{\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)}} + W_2 = W,$$

so erhält man

$$\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\left\{1 - \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}\cos 2\frac{\pi}{2K}x\right\}E = \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}W$$

Nun hat man aber die Entwicklung

$$\cos 2\,\mathrm{am}\,x = \Gamma_0^{(2)} + \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\frac{16}{k^2}\left\{\frac{q}{1-q^2}\cos 2\frac{\pi}{2K}x + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \dots\right\},$$

wo $\Gamma_0^{(2)}$ eine von k oder q abhängige Constante bedeutet, deren Werth wir weiter unten angeben werden. Es folgt hieraus:

$$\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\cos 2\frac{\pi}{2K}x = \frac{k^2(1-q^2)}{16q}\cos 2\,\mathrm{am}\,x - \frac{k^2(1-q^2)}{16q}\Gamma_0^{(2)}$$

$$-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2(1-q^2)\left\{\frac{2q}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x + \frac{3q^2}{1-q^6}\cos 6\frac{\pi}{2K}x + \dots\right\}$$

Mit Rücksicht auf diese Entwicklung erhält man aus der vorhergehenden Differentialgleichung, indem der Modul k^2 oder vielmehr q aus der Bedingungsgleichung

$$(24) \qquad k^2 = \frac{k^2\bar{\beta}(1-q^2)}{4q\lambda^2}$$

bestimmt wird, die folgende:

$$\frac{d^2E}{dx^2}+\left[k^2\cos 2\,\mathrm{am}\,x+\frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}(1-\bar\beta_0)-k^2\Gamma_0^{(2)}\right]E$$

$$=\frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\left\{W+\bar\beta(1-q^2)E\left[\frac{2q}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x+\ldots\right]\right\}$$

Bei der Integration dieser Gleichung müssen wir damit anfangen, die in E multiplicirten Glieder rechter Hand wegzulassen. Die Summe dieser Glieder, welche wir mit W_2 zusammenschlagen, ist, ebenso wie diese Function, immer eine sehr kleine Grösse zweiter Ordnung in Bezug auf μ^2. Bei der Integration wird zwar die Function, welche E als Factor enthält, zu Gliedern Veranlassung geben, welche entweder vergrössert werden oder auch in v_0 multiplicirt erscheinen; diese Glieder sind aber von der Ordnung μ^6 und können, ihres geringen Betrages wegen, mit Leichtigkeit erst später berücksichtigt, und in die Hauptglieder von E aufgenommen werden.

Wir bezeichnen noch

$$(25)\qquad \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}(1-\bar\beta_0)-k^2\Gamma_0^{(2)}=1-k^2\,\mathrm{sn}\,i\omega^2,$$

wo i die Bedeutung der imaginären Einheit hat, und erhalten alsdann die obige Differentialgleichung auf die von Herrn Hermite angewandte Form der Lamé'schen Differentialgleichungen gebracht, nehmlich

$$(26)\qquad \frac{d^2E}{dx^2}-[2k^2\,\mathrm{sn}\,x^2-1-k^2+k^2\,\mathrm{sn}\,i\omega^2]E=\frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}\{W+\ldots\}$$

Die elegante, von Herrn Hermite angegebene Form des Integrales dieser Gleichung ohne das Glied rechter Hand, ist die folgende:

$$(27)\qquad E=C_1\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{H'(i\omega)}{H(i\omega)}x}+C_2\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{H'(i\omega)}{H(i\omega)}x}$$

wo C_1 und C_2 die beiden Integrationsconstanten bedeuten. Diese Glieder enthalten die Mittelpunktsgleichung und die Evection und geben einen sehr genäherten Werth der Bewegung des Mondperigäums.

Die Grösse $\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}$ bezeichne ich durch $i\frac{\pi}{2K}\nu$, wo ν eine reelle positive Zahl, von derselben Ordnung wie μ, bedeutet. Mit Berücksichtigung des Werthes

$$\frac{\pi}{2K}x = (1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda + \frac{1}{2}\pi$$

findet man also:

$$\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x = i\nu\left\{(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda + \frac{1}{2}\pi\right\}$$

Wenn wir nun die beiden Constanten C_1 und C_2 durch zwei andere $\varkappa$ und Γ ersetzen, indem wir die Beziehungen

$$C_1 = \frac{\varkappa}{2}\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\, e^{i\Gamma - i\nu\left(\Lambda' - \mu\Lambda - \frac{\pi}{2}\right) - i(\Lambda' - \mu\Lambda)}$$

$$C_2 = \frac{\varkappa}{2}\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\, e^{-i\Gamma + i\nu\left(\Lambda' - \mu\Lambda - \frac{\pi}{2}\right) + i(\Lambda' - \mu\Lambda)}$$

feststellen, erhalten wir:

$$(28)\quad \theta(x)E = \frac{\varkappa}{2}\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\left\{\mathrm{H}(x+i\omega)+\mathrm{H}(x-i\omega)\right\}\cos\left[\nu(1-\mu)v_0 - \Gamma + \Lambda' - \mu\Lambda\right]$$

$$-\, i\frac{\varkappa}{2}\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\left\{\mathrm{H}(x+i\omega)-\mathrm{H}(x-i\omega)\right\}\sin\left[\nu(1-\mu)v_0 - \Gamma + \Lambda' - \mu\Lambda\right]$$

Dieses Resultat werde ich etwas näher entwickeln und auf die in der Astronomie gebräuchliche Form bringen, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die Bedeutung desselben leicht zu übersehen.

Zunächst ist an die Entwicklung

$$\mathrm{H}(x) = 2\sqrt[4]{q}\left\{\sin\frac{\pi}{2K}x - q^2\sin 3\frac{\pi}{2K}x + q^6\sin 5\frac{\pi}{2K}x - \dots\right\}$$

zu erinnern. Hieraus findet sich sogleich

$$\mathrm{H}(x+i\omega) = -\frac{1}{i}\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-\frac{\pi}{K}\omega+i\frac{\pi}{2K}x} - \ldots\right\}$$

$$\mathrm{H}(x-i\omega) = \frac{1}{i}\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\left\{e^{i\frac{\pi}{2K}x} - e^{-\frac{\pi}{K}\omega-i\frac{\pi}{2K}x} - \ldots\right\};$$

und wenn man den Werth von $\frac{\pi}{2K}x$ einsetzt, so gewinnt man die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(x+i\omega)+\mathrm{H}(x-i\omega) = 2\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\Big\{&\cos[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda]\\ &+ e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\cos[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda]\\ &+ q^2 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\cos 3[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda]\\ &+ \ldots\ldots\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(x+i\omega)-\mathrm{H}(x-i\omega) = -2i\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi}{2K}\omega}\Big\{&\sin[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda]\\ &- e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\sin[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda]\\ &+ q^2 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\sin 3[(1-\mu)v_0 - \Lambda' + \mu\Lambda]\\ &- \ldots\ldots\Big\}\end{aligned}$$

Bezeichnet man nun:

$$\varsigma = \mu - \nu(1-\mu),$$

so giebt die Gleichung (28):

$$\begin{aligned}\theta(x)E = \varkappa\cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma']&\\ + \varkappa e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\cos\{2(1-\mu)v_0 - 2(\Lambda'-\mu\Lambda) - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma']\}&\\ + \varkappa q^2 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\cos\{2(1-\mu)v_0 - 2(\Lambda'-\mu\Lambda) + [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma']\}&\end{aligned}$$

Das erste Glied rechter Hand ist das Hauptglied der Mittelpunktsgleichung, insofern diese in den Ausdruck für den Radius-vector eingeht; das zweite Glied entspricht der Evection; das Argument ςv_0 ist endlich die Bewegung des Mondperigäums.

Mit Hinweglassung der Glieder, welche in höheren Potenzen von q multiplicirt sind, hat man:

$$\frac{1}{\Theta(x)} = 1 + 2q\cos 2\frac{\pi}{2K}x$$

$$= 1 - 2q\cos 2[(1-\mu)v_0 - A' + \mu A]$$

und mit demselben Grade der Genauigkeit hat man:

$$\sqrt{1+\eta_1\cos(\lambda v_0 - A)} = 1 + \frac{1}{2}\eta_1\cos 2[(1-\mu)v_0 - A' + \mu A]$$

Durch Multiplication mit diesen beiden Factoren erhält man aus dem vorhergehenden Ausdrücke für $\Theta(x)E$, der Gleichung (17) gemäss, den folgenden:

$$(29)\quad \rho_0 = \varkappa\left[1 - \left(q - \frac{1}{4}\eta_1\right)\left(e^{-\frac{\pi}{K}\omega} + q^2 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\right)\right]\cos[(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]$$

$$+ \varkappa\left[e^{-\frac{\pi}{K}\omega} - \left(q - \frac{1}{4}\eta_1\right)\right]\cos\{2[(1-\mu)v_0 - A' + \mu A] - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]\}$$

$$- \varkappa\left[q - \frac{1}{4}\eta_1 - q^2 e^{\frac{\pi}{K}\omega}\right]\cos\{2[(1-\mu)v_0 - A' + \mu A] + [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]\}$$

$$- \varkappa\left[q - \frac{1}{4}\eta_1\right]e^{-\frac{\pi}{K}\omega}\cos\{4[(1-\mu)v_0 - A' + \mu A] - [(1-\varsigma)v_0 - \Gamma]\}$$

$$- \ldots\ldots$$

Dieser Ausdruck von ρ_0 ist indessen noch unvollständig, indem derselbe nicht diejenigen Glieder enthält, welche aus der Function W rechter Hand in der Gleichung (26) entspringen. Diese Glieder werden, wenn

man sie zunächst in der Function E berücksichtigt, aus der nachstehenden Formel erhalten:

$$(30)\quad E = -\frac{1}{\lambda}\frac{\pi}{2K}\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\,\mathrm{H}_1(i\omega)\,\Theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\int\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\,W dv_0$$

$$+\frac{1}{\lambda}\frac{\pi}{2K}\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\,\mathrm{H}_1(i\omega)\,\Theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\int\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\,W dv_0,$$

und diese Grösse ist dem Ausdrucke (27) hinzuzufügen, damit die vollständige Function E erhalten werde.

Die Ermittelung des gemeinschaftlichen Coefficienten der beiden Glieder in dem vorstehenden Ausdrucke habe ich in der ersten Abhandlung über die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper durchgeführt.[1] An sich ist diese Ermittelung nicht von Interesse und kann daher hier übergangen werden, und dies um so mehr, da sie leicht, auf Grund bekannter Regeln, aus der Integralrechnung bewerkstelligt werden kann.

Von den Gliedern in W_1 gedenke ich nur der nachstehenden, als der grössten und einflussreichsten

$$W_1 = -\gamma_0 - \beta_1\rho_0' - \gamma_1\cos(\lambda v_0 - A)$$

und eben diese Glieder bilden auch den Haupttheil der Function W. Das zweite dieser drei Glieder ist aber noch nicht auf eine solche Form gebracht, dass die Functionen unter dem Integralzeichen in der Gleichung (30) unmittelbar integrabel sind, wenn dieses Glied für W daselbst eingeführt wird. Aus der Theorie der Erdbewegung hat man aber, wenn man bloss den intermediären Werth von ρ_0' berücksichtigt,

$$\rho_0' = \varkappa'\cos[(1-\varsigma')v_0' - \Gamma'']$$

in welchem Ausdrucke $\varkappa'$ mit der Excentricität der Erdbahn identificirt werden, $\varsigma' v_0'$ die Bewegung des Erdperiheliums, und Γ'' die um 180° vermehrte Länge des Perihels (also das Perigäum der Sonne) bedeutet. Indem man ferner die Länge v_0' durch v_0 ersetzt und dabei die mit G bezeichnete Grösse vernachlässigt, ergiebt sich

$$\rho_0' = \varkappa'\cos[(1-\varsigma')(\mu v_0 - \mu A + A') - \Gamma'']$$

[1] Bihang till k. svenska Vetenskaps-akademiens handlingar. Bd. 6.

Mit Anwendung dieses Ausdruckes erhält man sämmtliche Glieder in W auf solche Form gebracht, dass die in der Gleichung (30) vorkommenden Integrationen unmittelbar auszuführen sind.

Die Einzelnheiten der hierauf bezüglichen leichten Rechnungen werde ich nun nicht weiter berühren, indem wir die allgemeine Form der Resultate auch ohne solche Details erkennen werden, und die bereits mitgetheilten Entwicklungen uns in den Stand setzen, über die numerische Genauigkeit, die bei der ersten Annäherung erreicht wird, uns ein Urtheil zu bilden. Zum Erkennen der allgemeinen Form der Resultate genügt folgende Bemerkung: Wenn in dem Producte

$$W\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}$$

ein Glied der Form

$$he^{igv_0-iB}$$

vorkommt, wo h, g und B beliebige aber doch reelle Constanten bedeuten, so enthält das Product

$$W\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}$$

das entsprechende Glied

$$he^{-igv_0+iB}$$

Wenn nun diese beiden Glieder in die Gleichung (30) eingesetzt werden, so erhalten wir das entsprechende Glied in E wie folgt:

$$\begin{aligned} E = &-\frac{h}{i\lambda g}\frac{\pi}{2K}\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\mathrm{H}_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x+igv_0-iB} \\ &-\frac{h}{i\lambda g}\frac{\pi}{2K}\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\mathrm{H}_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x-igv_0+iB}\end{aligned}$$

oder, wenn man jetzt B für $B-\nu\left(\Lambda'-\mu\Lambda-\frac{1}{2}\pi\right)$ schreibt,

$$\begin{aligned} (31)\quad E = &-\frac{h}{i\lambda g}\frac{\pi}{2K}\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\mathrm{H}_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)+\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}\cos\{[g-\nu(1-\mu)]v_0-B\} \\ &-\frac{h}{\lambda g}\frac{\pi}{2K}\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(i\omega)}{k'\mathrm{H}(i\omega)\mathrm{H}_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)-\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}\sin\{[g-\nu(1-\mu)]v_0-B\}\end{aligned}$$

5.

Die Glieder, welche wir jetzt theils entwickelt, theils angedeutet haben, entsprechen den Hauptgleichungen der Mondbewegung, nehmlich der Mittelpunktsgleichung, der Evection, der Variation und der jährlichen Gleichung. Dabei ist auch die Bewegung des Mondperigäums, die wir durch ςv_0 bezeichnet haben, ziemlich vollständig gegeben. Durch eine geringe Abänderung der betreffenden constanten Coefficienten, von der weiter unter die Rede sein soll, lässt sich die Genauigkeit noch steigern, ohne dass an der bisher befolgten Behandlung der Aufgabe formell Etwas geändert wird, so dass die Resultate immer noch als der ersten Annäherung entsprechend anzusehen sind. In der zweiten Annäherung kommen die Glieder, welche von den höheren Potenzen der Grössen ρ_0 und ρ_0' abhängen, mit in Rechnung, in so fern sie nehmlich die Glieder der intermediären Bahn, und namentlich die Bewegung des Perigäums beeinflussen. Unsere Aufgabe ist nun aber nicht die betreffenden Entwicklungen wirklich auszuführen, sondern vielmehr, die Resultate unter einer möglichst concentrirten Form zu erhalten. Zu diesem Zwecke werden wir zwei Functionen l und L_1 bilden, indem wir setzen:

$$(32)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}(x+i\omega)+\mathrm{H}(x-i\omega) = 2l\Theta(x)\cos L_1 \\ i\{\mathrm{H}(x+i\omega)-\mathrm{H}(x-i\omega)\} = 2l\Theta(x)\sin L_1 \end{cases}$$

Aus diesen Bestimmungen folgen verschiedene Relationen, nehmlich

$$[\Theta(x)]^2 l^2 = \mathrm{H}(x+i\omega)\mathrm{H}(x-i\omega)$$

$$\operatorname{tang} L_1 = i\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)-\mathrm{H}(x-i\omega)}{\mathrm{H}(x+i\omega)+\mathrm{H}(x-i\omega)}$$

$$L_1 = \frac{1}{2}i\log\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\mathrm{H}(x-i\omega)}$$

$$\frac{dL_1}{dx} = \frac{1}{2}i\left\{\frac{\mathrm{H}'(x+i\omega)}{\mathrm{H}(x+i\omega)} - \frac{\mathrm{H}'(x-i\omega)}{\mathrm{H}(x-i\omega)}\right\}$$

Erinnert man sich ferner der Beziehung:

$$\frac{\theta(0)^2}{k\,\theta(i\omega)^2}\,\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)\,\mathrm{H}(x-i\omega)}{[\theta(x)]^2} = -\operatorname{sn} i\omega^2 + \operatorname{sn} x^2,$$

so leuchtet die Richtigkeit des Ausdruckes

$$l = \sqrt{k}\,\frac{\theta(i\omega)}{\theta(0)}\sqrt{-\operatorname{sn} i\omega^2 + \operatorname{sn} x^2}$$

sofort ein.

Aus der Gleichung (28) ergiebt sich nun, indem die Gleichungen (32) berücksichtigt werden,

$$E = \varkappa\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}\,l\cos[L_1 + \nu(1-\mu)v_0 - \Gamma + \Lambda' - \mu\Lambda],$$

und, wie wir aus der Gleichung (31) ersehen, können die übrigen Glieder in E auf eine ähnliche Form gebracht werden. Fassen wir also alle Glieder in E zusammen, so können wir das Resultat, wie folgt, angeben,

$$(33)\qquad \begin{aligned} E = {} & \varkappa_0 l\cos(L_1 + \lambda_0 v_0 - B_0) \\ & + \varkappa_1 l\cos(L_1 + \lambda_1 v_0 - B_1) \\ & + \varkappa_2 l\cos(L_1 + \lambda_2 v_0 - B_2) \\ & + \ldots\ldots, \end{aligned}$$

wo die $\varkappa$ und die λ constante Coefficienten bezeichnen, deren Werthe ebenso wie die der Winkel B sehr einfach zu ermitteln sind, und daher hier übergangen werden. Ins Besondere hat man

$$\varkappa_0 = \varkappa\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}}{\sqrt[4]{q}}$$

$$\lambda_0 = \nu(1-\mu)$$

$$B_0 = \Gamma - \Lambda' + \mu\Lambda$$

Den Ausdruck (33) für E kann man indessen formell noch mehr

zusammenziehen, was für die späteren Operationen nicht ohne Nutzen sein wird. Wir bilden die Functionen:

$$(34)\quad \left|\begin{aligned} \delta\cos D = &\quad \varkappa_0 \\ &+ \varkappa_1 \cos[(\lambda_1 - \lambda_0)v_0 - (B_1 - B_0)] \\ &+ \varkappa_2 \cos[(\lambda_2 - \lambda_0)v_0 - (B_2 - B_0)] \\ &+ \ldots\ldots \\ \delta\sin D = &\quad \varkappa_1 \sin[(\lambda_1 - \lambda_0)v_0 - (B_1 - B_0)] \\ &+ \varkappa_2 \sin[(\lambda_2 - \lambda_0)v_0 - (B_2 - B_0)] \\ &+ \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Die numerischen Werthe der Constanten sind nun in der Theorie des Mondes solche, dass $\varkappa_0$ die Summe der Übrigen bei Weitem übertrifft. Man kann daher annehmen, dass δ eine immer positive Grösse bezeichnet; dabei wird D einen Winkel bedeuten, der wenige Grade zu beiden Seiten von Null hin und her schwankt.

Für die Function δ^2 führe ich noch den folgenden Ausdruck an

$$(35)\qquad \delta^2 = \varkappa_0^2 + \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \ldots$$

$$+ 2\varkappa_0\{\varkappa_1 \cos[(\lambda_1 - \lambda_0)v_0 - (B_1 - B_0)] + \varkappa_2 \cos[(\lambda_2 - \lambda_0)v_0 - (B_2 - B_0)] + \ldots\}$$

$$+ 2\varkappa_1\{\varkappa_2 \cos[(\lambda_2 - \lambda_1)v_0 - (B_2 - B_1)] + \varkappa_3 \cos[(\lambda_3 - \lambda_1)v_0 - (B_3 - B_1)] + \ldots\}$$

$$+ \ldots\ldots,$$

aus dem die Entwicklungen der verschiedenen Potenzen von δ erhalten werden können.

In dem Falle, dass von den Coefficienten $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, ..., alle mit Ausnahme der beiden ersten verschwinden, gestalten sich die Formeln besonders einfach, und weil dieser Fall factisch in Betracht gezogen werden wird, so gebe ich die betreffenden Formeln an.

Zunächst bezeichne ich

$$(\lambda_1 - \lambda_0)v_0 - (B_1 - B_0) = w$$

und erhalte

$$\delta \cos D = \varkappa_0 + \varkappa_1 \cos w$$

$$\delta \sin D = \varkappa_1 \sin w$$

$$\operatorname{tang} D = \frac{\varkappa_1 \sin w}{\varkappa_0 + \varkappa_1 \cos w}$$

$$\delta^2 = \varkappa_0^2 + 2\varkappa_0\varkappa_1 \cos w + \varkappa_1^2$$

$$\frac{dD}{dv_0} = \frac{\varkappa_0\varkappa_1 \cos w + \varkappa_1^2}{\delta^2} (\lambda_1 - \lambda_0)$$

$$\frac{d\delta}{dv_0} = -\frac{\varkappa_0\varkappa_1 \sin w}{\delta} (\lambda_1 - \lambda_0)$$

Aus der Gleichung (33) ergiebt sich nun, nachdem wir uns der Bezeichnungen (34) bedient haben,

$$E = \delta . l . \cos (L + D);$$

man findet ferner, indem man der Gleichung (21) gemäss den Werth von ρ_0 bildet, und dabei die Bezeichnungen

(36) $$\eta = \delta . l . \sqrt{1 + \eta_1 \cos (\lambda v_0 - A)}$$

einführt, das Resultat

(37) $$\rho_0 = \eta \cos (L + D)$$

In gewisser Hinsicht ist diese Form des Resultates mit wesentlichen Vortheilen verbunden, die jedoch andererseits von Nachtheilen aufgewogen werden, welche ihr eigenthümlich sind. Wenn man nehmlich, mit Hülfe dieses Werthes, die reducirte Zeit τ als Function der intermediären Länge v_0 entwickelt, so treten Glieder langer und kurzer Perioden durch einander auf, eine Unbequemlichkeit, die man doch auf ein möglichst geringes Maass zurückzubringen suchen muss. Eine solche Reduction ist auch sehr einfach auszuführen, wenn man von den Gliedern der Gleichung (33) alle solche abtrennt, die in ihren Haupttheilen entweder constant oder langer Periode sind. Die Functionen $\delta \cos D$ und $\delta \sin D$ werden nun auch diese Glieder nicht mehr enthalten und also wesentlich reducirt er-

scheinen. In der Mondtheorie wird es sich sogar empfehlen, von diesen Functionen alle diejenigen Glieder abzutrennen, die nicht in $\varkappa_0$ oder $\varkappa_1$ multiplicirt sind, wobei indessen vorausgesetzt wird, dass das in $\varkappa_1$ multiplicirte Glied der Variation entspricht. Die jährliche Gleichung ist alsdann unter den abgetrennten Gliedern zu suchen. Bezeichnen wir die Summe dieser durch R, so haben wir nun, statt der Gleichung (37), die folgende

$$\rho_0 = R + \eta \cos(L + D) \tag{38}$$

Es ist aber bei dieser Gleichung zu bemerken, dass R an sich sehr klein ist, aber Glieder enthält, die im Integrale $\int R dv_0$ gross werden. Da nun die Function $\eta \cos(L + D)$ keine, oder wenigstens keine wesentlichen Glieder langer Periode enthält, so können solche auch nicht in $\frac{\eta \cos(L + D)}{1 + R}$ vorkommen. Diesem Umstande gemäss muss die Entwicklung der reducirten Zeit als Function von v_0 angeordnet werden.

Mit der Erreichung der angeführten Resultate ist das Wesentlichste der vorliegenden Untersuchung absolvirt; denn wir haben in dem gefundenen Ausdrucke von ρ_0 bereits einen Werth dieser Grösse, welcher sehr genähert ist und die wesentlichen Eigenthümlichkeiten der Mondbahn angiebt. Es sind aber noch einige Bemerkungen hinzuzufügen, theils in Bezug auf die Ausführung der fortgesetzten Annäherungen, um die Function ρ_0 genauer zu bestimmen, theils in Bezug auf die Ermittelung der Functionen χ und τ.

6.

Sobald ein genäherter Werth der Function ρ_0 oder E gefunden worden ist, hat man denselben in die rechte Seite der Gleichung (26) zu substituiren. Im allgemeinen sind die hierbei vorkommenden Operationen mit keinen Schwierigkeiten verknüpft, jedoch mit der Ausnahme, dass Glieder auftreten, welche v oder v_0 als Factor haben und welche daher

Operationen veranlassen diese zu vernichten. Solche Glieder entstehen, wenn für W ein Product der Form

$$fE\cos 2s\frac{\pi}{2K}x$$

in die rechte Seite der Gleichung (30) eingesetzt wird, und zwar ist hierbei 2 der geringste Werth der ganzen Zahl s, und kommt von E nur der Theil in Betracht, welcher durch die Gleichung (27) gegeben ist. Der Coefficient f dieses Productes ist immer eine Grösse wenigstens zweiter Ordnung in Bezug auf β oder μ^2, und es wird sich zeigen, dass das resultirende, in v_0 multiplicirte Glied wenigstens dritter Ordnung ist. In Bezug auf dieses Glied, welches wir E_1 nennen wollen, giebt nun die Gleichung (30) ein Resultat der Form

$$E_1 = -f_1C_1\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\int\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)\mathrm{H}(x-i\omega)}{[\Theta(x)]^2}\cos 2s\frac{\pi}{2K}x\,dx$$

$$+f_1C_2\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\int\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)\mathrm{H}(x-i\omega)}{[\Theta(x)]^2}\cos 2s\frac{\pi}{2K}x\,dx+\ldots,$$

wo f_1 das Product von f und den constanten Factor in der Gleichung (30) bezeichnet.

Erwägen wir nun, dass

$$\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)\mathrm{H}(x-i\omega)}{[\Theta(x)]^2}=\frac{k\Theta(i\omega)^2}{[\Theta(0)]^2}\{-\operatorname{sn}i\omega^2+\operatorname{sn}x^2\},$$

und erinnern wir uns der Entwicklung

$$\operatorname{sn}x^2 = \text{const.}$$

$$-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\frac{1}{k^2}\left\{\frac{8q}{1-q^2}\cos 2\frac{\pi}{2K}x+\frac{16q^2}{1-q^4}\cos 4\frac{\pi}{2K}x+\ldots\right\},$$

so ersehen wir, dass das Resultat in Bezug auf E_1 das folgende wird:

$$E_1 = f_1\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\frac{\Theta(i\omega)^2}{k[\Theta(0)]^2}\frac{4sq^s}{1-q^{2s}}x\left\{C_1\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}-C_2\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\right\}+\ldots$$

Andererseits erhält man aus der Gleichung (27), wenn man daselbst, und zwar nur in dem Quotienten $\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}$, die Grösse ω um $\Delta\omega$ vermehrt denkt,

$$\Delta E = -x\left\{C_1\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\theta(x)}e^{-\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x} - C_2\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\theta(x)}e^{\frac{\theta'(i\omega)}{\theta(i\omega)}x}\right\}\frac{d^2\log\theta(i\omega)}{id\omega^2}\Delta\omega$$

Es geht aus der Form dieses Resultates sogleich hervor, dass man durch eine passende Bestimmung von $\Delta\omega$, die jedenfalls eine sehr kleine Grösse bezeichnet, dass Glied E_1 vernichten kann.

Dass die Änderung von ω übrigens keine seculären Glieder veranlasst, ist leicht nachzuweisen. Zunächst ist ersichtlich, dass sie nicht durch Differentiation der Functionen $\mathrm{H}(x+i\omega)$ und $\mathrm{H}(x-i\omega)$ entstehen können, aber auch in den Gliedern der Gleichung (30) hat eine Differentiation in Bezug auf ω kein seculäres Glied zu Folge. Wir betrachten den Ausdruck

$$A = e^{\alpha x}\int Fe^{-\alpha x}dx$$

wo α eine beliebige Function von ω und F eine Function von x bedeutet. Man erhält hieraus, indem nach ω differentiirt wird,

$$\frac{\partial A}{\partial\omega} = \frac{d\alpha}{d\omega}\left\{xe^{\alpha x}\int Fe^{-\alpha x}dx - e^{\alpha x}\int xFe^{-\alpha x}dx\right\}$$

$$= \frac{d\alpha}{d\omega}e^{\alpha x}\int\int Fe^{-\alpha x}dx^2,$$

ein Resultat, worin die Glieder, welche x als Factor enthielten, einander aufgehoben haben.

7.

Das Resultat, welches wir für $\frac{dz}{dv_0}$ angegeben haben, ist, obschon für die bisherige Verwendung hinreichend genau, doch nicht so genähert, wie wir es in der ersten Annäherung ohne Mühe finden können. Da wir aber bereits einen genäherten Werth dieser Grösse besitzen, so können wir die erste der Gleichungen (17) mit Rücksicht hierauf behandeln.

Wir schreiben diese Gleichung zunächst in der folgenden Weise:

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = -\beta_1 \sin(\lambda v_0 + 2\chi - A) + \beta_1(4\rho_0 - 3\rho_0')\sin(\lambda v_0 - A)$$
$$+ \beta_1(4\rho_0 - 3\rho_0')\chi\cos(\lambda v_0 - A)$$
$$+ \ldots\ldots$$

und führen in das dritte und die folgenden Glieder rechter Hand den genäherten Werth

$$\chi = \frac{\beta_1}{\lambda^2}\sin(\lambda v_0 - A) + 4\beta_1\int\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0^2 - 3\beta_1\int\int\rho_0'\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0^2$$

ein. Das Resultat, welches wir somit erhalten, bezeichnen wir, wie folgt:

$$(39)\quad \frac{d^2\chi}{dv_0^2} = -\beta_1 \sin(\lambda v_0 + 2\chi - A) + \beta_1(4\rho_0 - 3\rho_0')\sin(\lambda v_0 - A)$$
$$+ \frac{\beta_1^2}{2\lambda^2}(4\rho_0 - 3\rho_0')\sin 2(\lambda v_0 - A) + X_1,$$

wobei wir gesetzt haben:

$$(40)\qquad X_1 = 4\beta_1^2(4\rho_0 - 3\rho_0')\cos(\lambda v_0 - A)\int\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0^2$$
$$- 3\beta_1^2(4\rho_0 - 3\rho_0')\cos(\lambda v_0 - A)\int\int\rho_0'\sin(\lambda v_0 - A)\,dv_0^2$$

Die Function X_1 ist also, wie man leicht erkennt, eine sehr kleine Grösse, erstens zweiter Ordnung in Bezug auf β_1, dann aber auch zweiter Ordnung in Bezug auf die Constanten $\varkappa$ und $\varkappa'$.

Für die Integration einer Gleichung der Form (39) habe ich in der ersten Abhandlung über die Theorie der Bew. d. Himmelsk. eine Methode gegeben, die zwar keine directe ist, sondern das Resultat durch fortgesetzte Annäherungen giebt. Im vorliegenden Falle convergiren diese aber äusserst rasch, weil die in der ersten Annäherung vernachlässigten Glieder eine sehr kleine Grösse, von der Ordnung $\beta_1^3(4\rho_0 - 3\rho_0')^2$ bilden. Die Auseinandersetzung der Methode brauche ich hier nicht zu wiederholen; es genügt, die Resultate der ersten Annäherung anzuführen.

Aus der Gleichung:

$$k\left(\frac{2K}{\pi}\right) = \frac{\sqrt{8\beta_1}}{\lambda}$$

bestimmen wir den Modul k, und bezeichnen

$$\xi = \frac{2K}{\pi}\frac{1}{2}(\lambda v_0 - A);$$

wir erhalten alsdann:

$$(41) \qquad \chi = \operatorname{am}\xi - \frac{1}{2}(\lambda v_0 - A) + V_1,$$

wobei V_1 aus der nachstehenden Gleichung zu bestimmen ist:

$$V_1 = C_1 \operatorname{dn}\xi + C_2 \operatorname{dn}\xi\left[\frac{\Theta_1'(\xi)}{\Theta_1(\xi)} + \frac{E}{K}\xi\right]$$

$$+ \frac{\operatorname{dn}\xi}{\frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 2\beta_1}\int\frac{k'^2 d\xi}{(\operatorname{dn}\xi)^2}\int X \operatorname{dn}\xi d\xi$$

Die Buchstaben K und E bedeuten hier, wie gewöhnlich, die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, und die Grösse X bezeichnet die Summe aller Glieder rechter Hand in der Gleichung (39). Die willkürliche Constante C_1 kann sofort gleich Null gesetzt werden; die andere Constante C_2 muss man aber in der Weise bestimmen, dass die Glieder, welche den Factor ξ erhalten, zum Verschwinden gebracht werden. Solche Glieder lassen sich übrigens direct, durch eine geringe Änderung des Coefficienten β_1, vermeiden.

Handelt es sich nun darum, die χ-Function an und für sich zu entwickeln, so muss der bereits gefundene Werth von ρ_0 in die Function X substituirt werden; beabsichtigt man aber eine neue Annäherung in Bezug auf ρ_0 durchzuführen, so ist diese Grösse als noch unbestimmt in den Formeln beizubehalten, und man erhält alsdann ein Resultat für $\frac{d\chi}{dv_0}$, welches in derselben Weise, wie es in dem Artikel 3 gezeigt wurde, zu verwenden ist.

Die Herstellung der Function erheischt indessen noch die Entwicklung des Integrales

$$\int \eta \cos(L + D) \sin(\lambda v_0 - A) dv_0$$

und anderer, mit diesem verwandten. Ich werde daher die allgemeine Form

$$U = \int \eta^s e^{i[m(L+D)+\lambda_0 v_0 + M]} dv_0$$

in Betrachtung ziehen, aus welchem die Entwicklungen der vorkommenden Specialfälle zu erhalten sind. In diesem Ausdrucke bedeutet s, nicht minder als m ganze Zahlen, von welchen m auch negativ sein kann; M eine Constante, und λ_0 einen beliebigen positiven oder negativen Coefficienten, welcher natürlich auch die, dem Buchstaben λ vorhin beigelegten Werth haben kann. — Man könnte nun die Function dU in leichter Weise, in eine direct integrable Form gebracht erhalten, indem man die Entwicklung der Function $\eta^s e^{im(L+D)}$ zuerst durchführte — in welcher die Differenz $s - m$ immer eine positive gerade Zahl, Null nicht ausgenommen, bedeutet — allein dadurch würde man die concentrirte Form der Resultate, die wir doch beizubehalten bestrebt sind, aufgeben. Ein anderer Ausweg, die Integration durchzuführen, ist daher erforderlich.

Um eine solche vorzubereiten, setze ich:

$$U = P\eta^s e^{i[m(L+D)+\lambda_0 v_0 + M]}$$

Wenn nun dieser Ausdruck, nach ausgeführter Differentiation, mit dem vorhergehenden verglichen wird, so finden wir die Gleichung:

$$1 = \left\{\frac{s}{\eta}\frac{d\eta}{dv_0} + mi\left(\frac{dL}{dv_0} + \frac{dD}{dv_0}\right) + i\lambda_0\right\} P + \frac{dP}{dv_0}$$

in welcher Gleichung die bekannten Werthe der Differentialquotienten einzusetzen sind. Man erhält somit ein Resultat der Form:

$$1 = [ig - 2\varepsilon \sin(\lambda v_0 - A) + \Psi] P + \frac{dP}{dv_0},$$

indem man sich unter g und 2ε zwei constante Coefficienten denkt, von denen die zweite von der Ordnung des Verhältnisses zwischen Evection

und Mittelpunktsgleichung, multiplicirt mit einer ganzen Zahl, ist. Die Function Ψ bedeutet dabei ein Reihe Glieder, deren Summe immer klein im Verhältniss zu 2ε bleibt.

Wir setzen hierauf:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots,$$

und bestimmen die einzelnen P aus den Gleichungen:

$$1 = [ig - 2\varepsilon \sin(\lambda v_0 - A)] P_0 + \frac{dP_0}{dv_0}$$

$$-P_0 \Psi = [ig - 2\varepsilon \sin(\lambda v_0 - A)] P_1 + \frac{dP_1}{dv_0}$$

$$-P_1 \Psi = [ig - 2\varepsilon \sin(\lambda v_0 - A)] P_2 + \frac{dP_2}{dv_0}$$

u. s. w.

Hieraus findet sich:

$$P_0 = e^{-igv_0 - \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} \int e^{igv_0 + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} dv_0$$

$$P_1 = -e^{-igv_0 - \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} \int e^{igv_0 + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} P_0 \Psi dv_0$$

$$= -e^{-igv_0 - \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} \int \Psi dv_0 \int e^{igv_0 + \frac{2\varepsilon}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - A)} dv_0$$

u. s. w. — Ohne Schwierigkeit würde man, auf Grund dieser Ausdrücke, die betreffenden Functionen entwickeln können, allein wenigstens die erste derselben lässt sich durch die Methode der unbestimmten Coefficienten noch einfacher ermitteln.

Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$iP_0 = p_0 + p_1 e^{i(\lambda v_0 - A)} + p_2 e^{2i(\lambda v_0 - A)} + \cdots$$
$$+ p_{-1} e^{-i(\lambda v_0 - A)} + p_{-2} e^{-2i(\lambda v_0 - A)} + \cdots.$$

welche Bezeichnungsweise die folgenden Bedingungsgleichungen nach sich zieht:

$$1 = p_0 g + p_{-1}\varepsilon - p_1\varepsilon$$

$$0 = (\lambda + g)p_1 + \varepsilon p_0 - \varepsilon p_2$$

$$0 = (2\lambda + g)p_2 + \varepsilon p_1 - \varepsilon p_3$$

u. s. w.

$$0 = (\lambda - g)p_{-1} + \varepsilon p_0 - \varepsilon p_{-2}$$

$$0 = (2\lambda - g)p_{-2} + \varepsilon p_{-1} - \varepsilon p_{-3}$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen folgen, indem s eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$\frac{p_s}{p_{s-1}} = -\frac{\frac{\varepsilon}{s\lambda + g}}{1 - \frac{p_{s+1}}{p_s}\frac{\varepsilon}{s\lambda + g}}; \qquad \frac{p_{-s}}{p_{-s+1}} = -\frac{\frac{\varepsilon}{s\lambda - g}}{1 - \frac{p_{-s-1}}{p_{-s}}\frac{\varepsilon}{s\lambda - g}};$$

und die Beziehungen geben zu den nachstehenden Kettenbrüchen Anlass:

$$\frac{p_s}{p_{s-1}} = -\cfrac{\frac{\varepsilon}{s\lambda + g}}{1 + \cfrac{\frac{\varepsilon^2}{(s\lambda + g)[(s+1)\lambda + g]}}{1 + \cfrac{\frac{\varepsilon^2}{[(s+1)\lambda + g][(s+2)\lambda + g]}}{1 + \ldots\ldots}}}$$

$$\frac{p_{-s}}{p_{-s+1}} = -\cfrac{\frac{\varepsilon}{s\lambda - g}}{1 + \cfrac{\frac{\varepsilon^2}{(s\lambda - g)[(s+1)\lambda - g]}}{1 + \cfrac{\frac{\varepsilon^2}{[(s+1)\lambda - g][(s+2)\lambda - g]}}{1 + \ldots\ldots}}}$$

Diese Ausdrücke erweisen, nicht nur dass die Kettenbrüche convergent sind, wenn s einen hinlänglich grossen Werth hat, sondern auch

dass die Reihe, welche die Function P_0 darstellt, immer convergirt, den Fall jedoch ausgenommen, wo $s\lambda - g$ den Werth Null annehmen kann. Solche Fälle können indessen vermieden werden.

Hat man nach den angeführten Formeln die Verhältnisse $\frac{p_1}{p_0}$ und $\frac{p_{-1}}{p_0}$ gefunden, so ergiebt sich der absolute Werth von p_0 aus der Gleichung:

$$\frac{1}{p_0} = g + \varepsilon\left(\frac{p_{-1}}{p_0} - \frac{p_1}{p_0}\right)$$

Die übrigen Gleichungen des Systems, welches die Function P bestimmt, lassen sich in eine Reihe anderer Gleichungen zerlegen, von denen jede einzelne die Form der soeben betrachteten hat, und also durch die angeführten Ausdrücke integrirbar sind. In der That, wenn die Gleichung:

$$-P_{n-1}\Psi = \sum \gamma_s e^{i(\lambda_s v_0 - A_s)}$$

besteht, so setze man:

$$P_n = \gamma_0 P_{n.0} e^{i(\lambda_0 v_0 - A_0)} + \gamma_1 P_{n.1} e^{i(\lambda_1 v_0 - A_1)} + \ldots;$$

zur Bestimmung der Function $P_{n.s}$ erhält man alsdann die Gleichung:

$$1 = [i(g + \lambda_s) - 2\varepsilon \sin(\lambda v_0 - A)]\, P_{n.s} + \frac{dP_{n.s}}{dv_0},$$

welche mit der Gleichung, woraus P_0 bestimmt wurde, ganz analog ist; nur steht $g + \lambda_s$ anstatt der Constante g.

Wir kommen endlich zu der Aufgabe, die reducirte Zeit τ als Function von v_0 zu ermitteln: dieselbe ist jedoch nunmehr leicht zu lösen, weil die soeben auseinandergesetzte Integrationsmethode auch jetzt Verwendung finden wird. Man hat nehmlich nur den Werth von $d\tau$ aus der Gleichung (15) nach den steigenden Potenzen der Grösse ρ_0 zu entwickeln, wonach die Reduction auf integrirbare Formen ohne besondere Vorschriften äusserst leicht auszuführen ist. — Man hat aber hierbei die Glieder besonders zu beachten, die aus R herrühren; der constante Theil dieser Grösse, ebenso wie die constanten Theile von $R^2, R^3, \ldots, \eta^2, \eta^4, \ldots$ müssen in dem Factor p berücksichtigt werden, und man kann diesen, wie schon hervorgehoben wurde, in solcher Weise bestimmen, dass die mittlere Bewegung durch das Product $\sqrt{\mu_1}\, a^{-\frac{3}{2}}$ ausgedrückt wird. Die

Glieder langer Periode, welche in den erwähnten Functionen vorkommen, werden durch die Integration direct vergrössert, und es ist zweckmässig, sie besonders zu behandeln, d. h. sie nicht mit den Gliedern kurzer Periode, wie z. B. $\eta\cos(L + D)$, $\eta^2\cos 2(L + D)$, u. s. w. zusammenzuschlagen. Man kann nehmlich mit den zuletzt genannten Gliedern, oder vielmehr mit der Function, aus welcher sie entstehen, eine gewisse Transformation vornehmen, wodurch der Ausdruck für τ wesentlich an Übersichtlichkeit gewinnt; ich muss sie indessen hier bei Seite lassen, um diese Abhandlung nicht zu sehr auszudehnen.

8.

Bevor ich zu der Mittheilung der numerischen Resultate übergehe, will ich einiger Zusatzglieder gedenken, welche bisher vernachlässigt wurden, die aber leicht nachträglich Berücksichtigung finden können. Es sind dies die Glieder, welche aus der Function

$$G = 2\mu\int\rho_0' dv_0 - 2\mu\int\rho_0 dv_0$$

herrühren. Diese Function, die bisher vernachlässigt wurde, veranlasst in Q_0 und P_0, als den wesentlichsten, die Zusatzglieder:

$$\Delta Q_0 = -6\mu^3\cos(\lambda v_0 - A)\int\rho_0 dv_0$$

$$\Delta P_0 = -6\mu^3\sin(\lambda v_0 - A)\int\rho_0 dv_0$$

Hiermit ergeben sich:

$$\Delta\frac{d\chi}{dv_0} = -6\mu^3\int\cos(\lambda v_0 - A)\,dv_0\int\rho_0 dv_0$$

$$-\Delta P_0 - 2\Delta\frac{d\chi}{dv_0} = 6\mu^3\sin(\lambda v_0 - A)\int\rho_0 dv_0 + 12\mu^3\int\cos(\lambda v_0 - A)dv_0\int\rho_0 dv_0;$$

und wenn man auch hier die im Art. 3 angeführte Transformation anwendet, und dabei alle unwesentlichen Glieder weglässt, so wird zunächst:

$$-\Delta P_0 - 2\Delta\frac{d\chi}{dv_0} = -6\mu^3\sin(\lambda v_0 - A)\frac{d\rho_0}{dv_0} - 12\mu^3\int\cos(\lambda v_0 - A)\frac{d\rho_0}{dv_0}dv_0$$

$$= -6\mu^3\sin(\lambda v_0 - A)\frac{d\rho_0}{dv_0} - 12\mu^3\cos(\lambda v_0 - A)\rho_0$$

$$-12\mu^3\lambda\int\sin(\lambda v_0 - A)\rho_0 dv_0$$

In dem letzten Gliede dieses Ausdruckes setzen wir den Werth:

$$\int\rho_0\sin(\lambda v_0 - A)dv_0 = \frac{\sin(\lambda v_0 - A)\frac{d\rho_0}{dv_0} - \lambda\cos(\lambda v_0 - A)\rho_0}{\eta_0[1 + \eta_1\cos(\lambda v_0 - A)]}$$

ein, und erhalten, immer mit Hinweglassung unwesentlicher Glieder:

$$-\Delta P_0 - 2\Delta\frac{d\chi}{dv_0} = -6\mu^3\left(1 + 2\frac{\lambda}{\eta_0}\right)\sin(\lambda v_0 - A)\frac{d\rho_0}{dv_0}$$

$$-12\mu^3\left(1 - \frac{\lambda^2}{\eta_0}\right)\cos(\lambda v_0 - A)\rho_0$$

Hiernach findet man leicht, als Correction von $\bar{\beta}$, den Werth:

$$\Delta\bar{\beta} = 3\mu^3\left(6\frac{\lambda^2}{\eta_0} + \lambda - 4\right)$$

Diese Vorbemerkung musste vorausgeschickt werden um eine der folgenden Zahlen motiviren zu können, die mit Rücksicht auf die zuletzt gegebene Correction berechnet worden ist.

Mit den bekannten Werthen der mittleren Bewegungen des Mondes und der Sonne, nehmlich:

$$\left.\begin{aligned}\log n &= 7.2350019\\ \log n' &= 6.1125936\end{aligned}\right\}\ \text{in } 365\tfrac{1}{4}\ \text{Tagen}$$

ergaben sich:

$$\log\mu = 8.8775917$$
$$\log\lambda = 0.2669659$$
$$\log\beta_1 = 7.9312747;$$

und hierauf:

$$\log\beta_0 = 7.9307323$$

$$\log\beta = 8.2142154$$

$$\log\gamma_0 = 7.4557767$$

$$\log\gamma_1 = 8.2496706;$$

ferner:

$$\log\eta_0 = 0.3852098$$

$$\log\eta_1 = 8.1821890$$

$$\log\eta_2 = 7.6266856;$$

und endlich:

$$\log\overline{\beta}_0 = 7.9153485$$

$$\log\overline{\beta} = 9.0107692,$$

in welchem letzten Werthe die Correction $\Delta\overline{\beta}$ bereits aufgenommen worden ist.

Nachdem diese Vorbereitungsrechnungen erledigt waren, ergab sich die Grösse q aus der Gleichung (24), oder vielmehr aus der, dieser Gleichung entstammenden Reihe:

$$q = \frac{1}{4}\frac{\overline{\beta}}{\lambda^2} - \frac{1}{64}\left(\frac{\overline{\beta}}{\lambda^2}\right)^3 + \ldots$$

Es fand sich:

$$\log q = 7.8747530$$

Vermittelst der bekannten Formeln:

$$k = 4\sqrt{q}\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots}\right\}^4$$

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1-q^3} + \ldots$$

ergaben sich ferner:

$$\log k = 9.5265621$$

$$\log\frac{2K}{\pi} = 0.0129229$$

Zur Berechnung des Gliedes $k^2 \Gamma_0^{(2)}$ dient die Formel:

$$k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Gamma_0^{(2)} = -32\left\{\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \frac{q^{10}}{(1-q^{10})^2} + \ldots\right\}$$

$$= -32q^2\{1 + 2q^2 + 4q^4 + \ldots\}$$

welche leicht aus der Gleichung

$$\Gamma_0^{(2)} = 1 - \frac{2}{k^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left\{\frac{8q}{(1-q)^2} + \frac{8q^3}{(1-q^3)^2} + \ldots\right\}$$

gefolgert wird.

Setzt man nun in die Gleichung (25):

$$\frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}(1-\bar{\beta}_0) - k^2\Gamma_0^{(2)} = \frac{4\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{\lambda^2}(1-\bar{\bar{\beta}}_0),$$

so findet man, auf Grund der vorhergehenden Entwicklung,

$$\bar{\bar{\beta}}_0 = \bar{\beta}_0 - 8\lambda^2 q^2(1 + 2q^2 + 4q^4 + \ldots)$$

Die Einsetzung der bereits angeführten Werthe in die rechte Seite dieser Gleichung ergab:

$$\log\bar{\bar{\beta}}_0 = 7.8255800;$$

und da die Grösse $\operatorname{sn} i\omega$ aus der Gleichung

$$k^2 \operatorname{sn} i\omega^2 = 1 - \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2(1-\bar{\bar{\beta}}_0)$$

bestimmt wird, so ist:

$$\log k^2 \operatorname{sn} i\omega^2 = 8.9771709_n$$

Zur Ermittelung von $e^{\frac{\pi}{2K}\omega}$ dient die Entwicklung

$$-ik\operatorname{sn} i\omega = \frac{\pi}{2K}\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)\left\{\frac{2\sqrt{q}(1+q)}{(1-q)^2 - q\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{2\sqrt{q^3}(1+q^3)}{(1-q^3)^2 - q^3\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)^2} + \ldots\right\}$$

Der Kürze wegen bezeichne ich:

$$x = e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}$$

und setze:

$$\sigma = -ik \operatorname{sn} i\omega,$$

so dass

$$\log \sigma = 9.4885855,$$

und erhalte hierauf die erste Annäherung in Bezug auf x, wenn ich diese Grösse aus der quadratischen Gleichung

$$\sigma(1-q)^2 = 2\sqrt{q}(1+q)\frac{\pi}{2K}x + q\sigma x^2$$

bestimme, woraus für die Unbekannte die nachstehende Reihe erhalten wird:

$$x = \frac{\sigma(1-q)^2}{2\sqrt{q}(1+q)}\frac{2K}{\pi}\left\{1 - \frac{\sigma^2(1-q)^2}{4(1+q)^2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \ldots\right\}$$

Nachdem x in solcher Weise näherungsweise bekannt geworden ist, setzt man diesen Näherungswerth in den Ausdruck:

$$p = \frac{q(1+q^3)}{(1-q^3)^2 - q^3x^2} + \frac{q^2(1+q^6)}{(1-q^5)^2 - q^5x^2} + \ldots$$

und erhält hierauf einen schon sehr nahe richtigen Werth aus der kubischen Gleichung

$$\sigma = 2\sqrt{q}(1+q)\frac{\pi}{2K}x\left\{\frac{1}{(1-q)^2 - qx^2} + p\right\}$$

Nach Einsetzung der numerischen Werthe fand sich:

$$\log x = 0.2401030$$

woraus sogleich folgt:

$$\log e^{\frac{\pi}{2K}\omega} = 0.3412369$$

Die Berechnung der Grösse, die wir mit ν bezeichneten, kann mit Hülfe der Entwicklung

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} = 2i\frac{\pi}{2K}x\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)\left\{\frac{q}{(1-q)^2 - qx^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2 - q^3x^2} + \ldots\right\}$$

gefunden werden, wo wir unter der Bezeichnung x fortwährend die Grösse $e^{\frac{\pi}{2K}\omega} - e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}$ verstehen. Aus diesem Werthe folgt:

$$\nu = 2x\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)\left\{\frac{q}{(1-q)^2 - qx^2} + \dots\right\},$$

wonach die nachstehende Formel für ς gefunden wird:

$$\varsigma = \mu - 2(1-\mu)\,x\left(e^{\frac{\pi}{2K}\omega} + e^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\right)\left\{\frac{q}{(1-q)^2 - qx^2} + \dots\right\}$$

Das Resultat ergiebt sich aber aus dieser Formel nicht sehr genau, weil ς sehr viel kleiner ist, als die beiden Zahlen, deren Differenz sie ausmacht. Eine Formel für ς, die schärfere Resultate liefert, erhält man in der folgenden Weise.

Die bekannte Entwicklung der elliptischen Function $\operatorname{dn} i\omega$ giebt uns

$$\frac{2}{\lambda}\left(\frac{\pi}{2K}\right)\sqrt{1-\bar{\bar{\beta}}_0} = \operatorname{dn} i\omega = 1 + 2\frac{\pi}{2K}x^2\left\{\frac{q\frac{1+q}{1-q}}{(1-q)^2 - qx^2} - \frac{q^3\frac{1+q^3}{1-q^3}}{(1-q^3)^2 - q^3x^2} + \dots\right.$$

Erinnert man sich des Werthes

$$\frac{1}{2}\lambda = 1 - \mu,$$

so leitet man aus der vorstehenden Formel ohne Mühe die folgenden ab, wobei die Entwicklung von $\frac{2K}{\pi}$ zu berücksichtigen ist,

$$0 = \frac{1}{2}\bar{\bar{\beta}}_0 + \frac{1}{8}\bar{\bar{\beta}}_0^2 + \dots + (1-\mu)\left(\frac{4q}{1-q} - \dots\right) - \mu$$

$$+ 2(1-\mu)x^2\left\{\frac{q + \frac{2q^2}{1-q}}{(1-q)^2 - qx^2} - \dots\right\}$$

Diese Gleichung addiren wir zu dem vorstehenden Ausdrucke von ς, wodurch die grössten Glieder sich aufheben, und es bleibt:

$$\varsigma = \frac{1}{2}\bar{\bar{\beta}}_0 + \frac{1}{8}\bar{\bar{\beta}}_0^2 + \dots + (1-\mu)\left(\frac{4q}{1-q} - \dots\right)$$

$$- 4(1-\mu)xe^{-\frac{\pi}{2K}\omega}\frac{q}{(1-q)^2 - qx^2} + 4(1-\mu)\frac{q^2x^2}{(1-q)[(1-q)^2 - qx^2]},$$

eine Formel, welche unter Berücksichtigung, dass

$$xe^{-\frac{\pi}{2K}\omega} = 1 - e^{-\frac{\pi}{K}\omega}$$

ist, sowie unter Hinweglassung der Grössen von der Ordnung q^3 gefunden wurde und welche endlich in die folgende übergeht:

$$\varsigma = \frac{1}{2}\overline{\overline{\beta}}_0 + \frac{1}{8}\overline{\overline{\beta}}_0^2 + \cdots + \frac{4(1-\mu)q}{(1-q)[(1-q)^2 - qx]}\left\{e^{-\frac{\pi}{K}\omega}(1-q) - q\right\}$$

Nach dieser Formel wurde ς berechnet, und es fand sich:

$$\varsigma = 0.009117$$

während der wahre Werth 0.008539 beträgt. Das in unserer ersten Annäherung gefundene Resultat ist also um etwa $\frac{1}{15}$ des wahren Werthes zu gross gefunden. Der Unterschied beider hätte noch erheblich geringer gemacht werden können, wenn wir die Glieder, welche vom Quadrat der Neigung und von den Quadraten der Excentricitäten abhängen, berücksichtigt, und überhaupt alle Glieder höherer Ordnung sorgfältig mitgenommen hätten, deren Mitberücksichtigung die Form unserer Lösung nicht geändert haben würde. Dies lag jedoch ausser dem Bereiche unserer Aufgabe, die nur eine erste Annäherung bezweckte.

ÜBER DIE AUFLÖSBAREN GLEICHUNGEN VON DER FORM

$$x^5 + ux + v = 0$$

VON

C. RUNGE
in BERLIN.

Eine irreductible Gleichung von Primzahlgrad p ist dann und nur dann auflösbar, wenn, unter $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ eine gewisse Anordnung der Wurzeln verstanden, die Substitutionen ihrer Gruppe unter den folgenden enthalten sind:[1]

$$\begin{pmatrix} \xi_\lambda \\ \xi_{\alpha\lambda+\beta} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, p-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, p-1 \end{pmatrix}$$

(wo der Index auf den kleinsten Rest modulo p zu reduciren ist), oder in der Ausdrucksweise von Herrn KRONECKER, wenn eine der »metacyklischen» Functionen rational ist.[2]

Um zu entscheiden, ob eine irreductible Gleichung von Primzahlgrad auflösbar ist oder nicht, hat man also die Gleichung aufzustellen, welcher irgend eine metacyklische Function genügt und zu untersuchen, ob dieselbe eine rationale Wurzel besitzt oder nicht.

Theoretisch ist es dabei völlig gleichgültig, welche metacyklische Function der Rechnung zu Grunde gelegt wird. Es genügt, dass sie metacyklisch sei, d. h. dass sie bei den oben genannten Substitutionen ihren Werth nicht ändere, bei jeder andern Substitution dagegen in einen andern Werth übergehe.

---

[1] Vergl. SERRET: *Cours d'Algèbre supérieure,* Tome II, Sect. V, N° 588 u. 589.

[2] Vergl. Monatsberichte der Berliner Akademie, 3 März 1879, II., § 6.

Für die Gleichung fünften Grades genügt jede metacyklische Function einer Gleichung sechsten Grades, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten der Gleichung fünften Grades sind. Für eine besondere metacyklische Function hat bereits MALFATTI die entsprechende Gleichung sechsten Grades gebildet, ohne jedoch die wahre Bedeutung derselben zu kennen. Denn er bestritt die von RUFFINI behauptete Unauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades und konnte also nicht wissen, dass die von ihm gebildete Gleichung sechsten Grades das Kriterium der Auflösbarkeit liefert.[1]

MALFATTI's Rechnung ist einigermaassen weitläuftig. Ein kürzeres Verfahren hat JACOBI vorgeschlagen,[2] welches weiter unten angewendet werden soll.

Für die Gleichungen von der Form

$$x^5 + ux + v = 0$$

vereinfachen sich die Ausdrücke erheblich und hier gelingt es die folgenden beiden Resultate abzuleiten:

1. Beschränkt man u und v auf alle ganzzahligen Werthe, deren absoluter Betrag nicht grösser ist als eine ganze positive Zahl n, wodurch man also $(2n + 1)^2$ Gleichungen erhält, so ist die Menge der auflösbaren unter ihnen für einen hinreichend grossen Werth von n gegen die ganze Anzahl beliebig klein.

2. u und v lassen sich als rationale Functionen zweier Parameter λ und μ dergestalt ausdrücken, dass durch Einsetzen irgend welcher rationalen Grössen für λ und μ immer eine auflösbare Gleichung entsteht und umgekehrt jede irreductible auflösbare Gleichung von der Form $x^5 + ux + v = 0$ durch Einsetzung zweier rationalen Grössen für λ und μ erhalten werden kann.

---

[1] Vergl. BRIOSCHI, Atti dell' Istituto Lombardo, IX, 1863, pag. 215—232.

[2] *Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes*, CRELLE's Journal, Bd. 13, und Gesammelte Werke, Bd. III, pag. 276.

I.

Versteht man unter x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 die fünf Wurzeln der Gleichung fünften Grades, so ist

$$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0$$

eine zwölfwerthige Function. Denn sie bleibt bei den zehn Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_\lambda \\ x_{\alpha\lambda+\beta} \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} \alpha=1,4 \\ \beta=0,\ 1,2,3,4 \end{pmatrix}$$

und nur bei diesen ungeändert.

Die zwölf conjugirten Functionen gruppiren sich paarweise, so dass je zwei bei derselben Gruppe cyklischer Substitutionen ungeändert bleiben. So gehört zu

$$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0$$

diejenige conjugirte Function, welche aus ihr durch eine der Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_\lambda \\ x_{\alpha\lambda} \end{pmatrix} \qquad \qquad (\alpha=2,3)$$

hervorgeht, also

$$x_0x_2 + x_2x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_3x_0.$$

Es werde die erste mit y_1, die zweite mit y_2 bezeichnet. Beide bleiben bei denselben zehn Substitutionen ungeändert. Daher ist $y_1 - y_2$ ebenfalls eine zwölfwerthige Function. Hier sind die paarweise zusammengehörigen conjugirten Functionen einander entgegengesetzt.

Bei Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante $\sqrt{\Delta}$ bleiben nur 60 Substitutionen übrig, zu denen auch diejenigen gehören bei denen y_1 und y_2 ungeändert bleiben. Daher hat $y_1 - y_2$ nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante nur sechs Werthe. Bezeichnet man dieselben mit $z_1, z_2, \ldots, z_6$, so sind $-z_1, -z_2, \ldots, -z_6$ die andern sechs conjugirten Werthe. Die Functionen $z_1, z_2, \ldots, z_6$ gehen nur durch solche Substitutionen in einander über, bei denen die Quadratwurzel aus

der Discriminante ungeändert bleibt. Wendet man daher auf $z_1, z_2, \ldots, z_6$ irgend eine Substitution an, welche die Quadratwurzel aus der Discriminante in ihr Entgegengesetztes verwandelt, so müssen $z_1, z_2, \ldots, z_6$ in irgend einer Reihenfolge in $-z_1, -z_2, \ldots, -z_6$ übergehn.

Eine homogene symmetrische Function von $z_1, \ldots, z_6$ kann also bei irgend welchen Vertauschungen von $x_0, x_1, \ldots, x_4$ höchstens in ihr Entgegengesetztes übergehn und zwar auch nur dann, wenn ihre Dimension ungrade ist.

Sei

$$z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + \ldots + a_6 = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_6$ sind, so müssen also a_2, a_4, a_6 ganze symmetrische Functionen von $x_0, x_1, \ldots, x_4$ sein, während a_1, a_3, a_5 sich nur durch einen ganzen symmetrischen Factor von $\sqrt{\Delta}$ unterscheiden können. Nun sind a_1, a_3, a_5 resp. von den Dimensionen 2, 6, 10, und $\sqrt{\Delta}$ von der 10. Dimension in $x_0, x_1, \ldots, x_4$. Also müssen a_1 und a_3 Null sein, während a_5 sich nur durch eine ganze Zahl von $\sqrt{\Delta}$ unterscheidet.

Die Gleichung hat mithin die folgende Form

$$z^6 + a_2 z^4 + a_4 z^2 + a_6 = m\sqrt{\Delta}\, z$$

(wo m eine ganze Zahl bedeutet und a_2, a_4, a_6 ganze ganzzahlige Functionen der Coefficienten der Gleichung fünften Grades sind).[1]

Beschränkt man sich auf die Gleichung

$$x^5 + ux + v = 0,$$

[1] In der oben angeführten Abhandlung von Jacobi, der diese Deduction entnommen ist, findet sich ein Fehler. Er bemerkt nicht, dass die Function

$$x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_0$$

ausser bei den cyklischen Substitutionen $\begin{pmatrix} x_\lambda \\ x_{\lambda+\beta} \end{pmatrix}$ noch bei den Substitutionen $\begin{pmatrix} x_\lambda \\ x_{4\lambda+\beta} \end{pmatrix}$ ungeändert bleibt und dass diese Eigenschaft für die Argumentation wesentlich ist.

An Stelle der cyklischen Function, welche er mit dem Symbol (12345) bezeichnet, ist eine solche zu setzen, die bei den genannten 10 Substitutionen ungeändert bleibt; alsdann sind seine Folgerungen richtig.

so sind a_2, a_4, a_6 ganze ganzzahlige Functionen von u und v. Da aber v von der fünften, u von der vierten Dimension ist, so folgt, dass

$$a_2 = m_1 u, \qquad a_4 = m_2 u^2, \qquad a_6 = m_3 u^3$$

(wo m_1, m_2, m_3 ganze Zahlen sind).

Um m_1, m_2, m_3, m zu finden, setze man $u = -1$, $v = 0$. Dann ist $\Delta = -4^4$ und $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, i, i^2, i^3, i^4$,

$$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 = -2i, -2i, -2i, -2i, 2+4i, -2+4i,$$

$$z^6 - m_1 z^4 + m_2 z^2 - m_3 \pm 16imz = (z+2i)^4(z^2 - 8iz - 20)$$
$$= z^6 + 20z^4 + 240z^2 - 320 + 512iz$$

und daher

$$(z^6 - m_1 z^4 + m_2 z^2 - m_3)^2 + 16^2 m^2 z^2 = (z^2+4)^4(z^4 + 24z^2 + 400).$$

Mithin wird die Gleichung für z, nachdem man durch Quadriren die Wurzel $\sqrt{\Delta}$ weggeschafft hat,

$$(z^6 - 20uz^4 + 240u^2z^2 + 320u^3)^2 = 4^5 \Delta z^2, \qquad \Delta = 4^4 u^5 + 5^5 v^4,$$

oder

$$(z^2 - 4u)^4 (z^4 - 24uz^2 + 400u^2) = 4^5 \cdot 5^5 \cdot v^4 z^2.$$

Setzt man $\sigma = \frac{z^2}{4}$, so ist σ eine metacyklische Function und ihre Gleichung

$$(1) \qquad (\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3)^2 = \Delta\sigma$$

oder in andrer Form

$$(2) \qquad (\sigma - u)^4 (\sigma^2 - 6u\sigma + 25u^2) = 5^5 v^4 \sigma.$$

Nur für solche Werthe von u und v, für welche diese Gleichungen eine rationale Wurzel haben, kann die Gleichung $x^5 + ux + v = 0$ auflösbar sein, vorausgesetzt, dass sie nicht in Factoren zerfällt. Im letzteren Falle ist nicht nothwendig einer der sechs Werthe von σ rational, wie weiter unten an einem Beispiele gezeigt werden wird. Umgekehrt, wenn die Gleichungen (1) und (2) eine rationale Wurzel ergeben, so kann man daraus noch nicht schliessen, dass $x^5 + ux + v = 0$ auflösbar ist.

Sondern es ist erforderlich, dass die rationale Wurzel eine einfache Wurzel sei. Nur unter dieser Voraussetzung ist die Function von $x_0, x_1, \ldots, x_4$, welche diesen Werth annimmt, eine metacyklische. Denn im entgegengesetzten Falle bleibt sie bei noch anderen Substitutionen ausser den metacyklischen ungeändert. Untersuchen wir, welche Beziehung zwischen u und v bestehen muss, damit die Gleichungen (1) und (2) eine mehrfache Wurzel besitzen. In diesem Falle muss zugleich die Ableitung nach σ verschwinden. Es muss sein

$$2(3\sigma^2 - 10u\sigma + 15u^2)(\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3) = \Delta.$$

Also wenn dieser Ausdruck für Δ in (1) eingesetzt wird

$$(\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3)$$

$$(\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3 - 6\sigma^3 + 20u\sigma^2 - 30u^2\sigma) = 0$$

oder

$$-5(\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3)(\sigma - u)^3 = 0.$$

Es wäre also entweder

$$\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3 = 0$$

oder

$$\sigma - u = 0.$$

Im ersten Falle folgt aus (1) $\Delta\sigma = 0$, also entweder $\Delta = 0$ oder $\sigma = 0$. Im zweiten Falle $\sigma - u = 0$ folgt aus (2) $v^4\sigma = 0$, also auch entweder $v = 0$ oder $\sigma = 0$ und daher $u = 0$.

Wir haben also drei Möglichkeiten $\Delta = 0$, $v = 0$, $\sigma = 0$. Die dritte reducirt sich auf die erste; denn soll $\sigma = 0$ eine mehrfache Wurzel sein, so muss in (1) sowohl das von σ unabhängige Glied als der Coefficient der ersten Potenz von σ verschwinden, also $u = 0$ und $\Delta = 0$ sein. Mithin können die Gleichungen (1) und (2) nur dann eine mehrfache Wurzel besitzen, wenn entweder $\Delta = 0$ oder $v = 0$ ist. In beiden Fällen ist die Gleichung

$$x^5 + ux + v = 0$$

reductibel.

Für irreductible Gleichungen ist es daher eine nothwendige und hinreichende Bedingung der Auflösbarkeit, dass die Gleichungen (1) und (2) eine rationale Wurzel besitzen.

II.

Für den Fall ganzzahliger Werthe von u und v sollen nun die Gleichungen einer näheren Betrachtung unterworfen werden. Dann sind die Coefficienten der Gleichungen (1) und (2) ganze Zahlen und der Coefficient der höchsten Potenz von σ ist gleich 1. Daher ist jede rationale Wurzel nothwendig eine ganze Zahl.[1] Nach dieser Bemerkung ist es nicht schwer zu sehen, dass jedem ganzzahligen Werthe von u nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe von v und jedem ganzzahligen Werthe von v nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe von u entspricht, für welche (1) und (2) eine rationale Wurzel erhalten können. Auszunehmen sind dabei nur die Werthe $u = 0$ und $v = 0$. Für diese erhalten (1) und (2) bei beliebigen rationalen Werthen von v resp. u immer eine rationale Wurzel.

Habe zunächst u einen bestimmten ganzzahligen von Null verschiedenen Werth. Soll ein ganzzahliger Werth von σ die Gleichungen (1) und (2) befriedigen, so muss dieser Werth ein Theiler des von σ unabhängigen Gliedes sein. Der Werth von σ, welcher diese beiden Gleichungen befriedigt, muss also ein Theiler von $25u^6$ sein. Das ergiebt eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe für σ. In Folge von (2) lässt sich nun v^4 rational durch σ und u ausdrücken. Wir erhalten also für v nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe, für welche σ rational sein kann.

Giebt man andrerseits v irgend einen von Null verschiedenen ganzzahligen Werth, so ergiebt sich durch eine ähnliche Schlussfolge nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe von u, für welche die Gleichungen (1) und (2) eine rationale Wurzel besitzen können.

Es folgt zunächst aus (2), dass σ nothwendig positiv sein muss, weil $(\sigma - u)^4$, $\sigma^2 - 6\sigma u + 25u^2$ oder (was dasselbe ist) $(\sigma - 3u)^2 + 16u^2$ und v^4 positiv sind. Ferner muss $\sigma^2 - 6\sigma u + 25u^2$ ein Theiler von $5^5 v^4 \sigma$ sein. Mithin

$$\sigma^2 - 6\sigma u + 25u^2 < 5^5 v^4 \sigma$$

---

[1] Vergl. Serret: *Cours d'Alg.*, Section I, Chap. VII, N:o 149.

oder

$$\sigma^2 - 6\sigma u < 5^4 v^4 \sigma$$

und daraus

$$\sigma - 6u < 5^4 v^4.$$

Andrerseits ist

$$(\sigma - 3u)^2 + 16u^2 < 5^5 v^4 \sigma$$

und daher

$$16u^2 < 5^5 v^4 \sigma.$$

Mithin

$$16u^2 < 5^{10} v^8 + 5^5 . 6 . v^4 u$$

oder

$$u(16u - 5^5 . 6 . v^4) < 5^{10} v^8.$$

Für negative Werthe von u sind beide Factoren der linken Seite gleichen Zeichens und daher der absolute Betrag eines jeden kleiner als $5^{10} v^8$. Für positive Werthe von u ergiebt sich

$$16u - 5^5 . 6 . v^4 < 5^{10} v^8$$

oder

$$16u < 5^{10} v^8 + 5^5 . 6 . v^4.$$

Auch hier kann es also nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe von u geben, wofür (1) und (2) eine rationale Wurzel besitzen.

Untersuchen wir z. B. die Gleichung

$$x^5 + x + v = 0.$$

Eine rationale Wurzel von (1) und (2) müsste bei ganzzahligen Werthen von v ein positiver Theiler von 25 sein. Es bleiben also nur die Möglichkeiten $\sigma = 1, 5, 25$. Für dieselben hat $(\sigma - u)^4 (\sigma^2 - 6u\sigma + 25u^2)$ die Werthe $0, 4^5 . 5, 3^4 . 4^9 . 5^3$. Da diese Werthe durch $5^5 . \sigma$ theilbar sein müssen um ganzzahlige Werthe von v zu liefern, so ergiebt sich $\sigma = 1$, $v = 0$ allein als zulässig. $v = 0$ ist der einzige ganzzahlige Werth von v, wofür die Gleichungen (1) und (2) eine rationale Wurzel haben. Man bemerke zugleich, dass auch für solche ganzzahligen Werthe von v, für welche $x^5 + x + v$ reductibel ist, z. B. für $v = 2$, die Gleichungen (1) und (2) keine rationale Wurzel besitzen, dass also aus der Auflösbarkeit der Gleichung fünften Grades allein ohne die weitere Voraussetzung der Irreductibilität nicht auf die Rationalität einer der Werthe von σ geschlossen werden kann.

III.

Beschränkt man u und v auf alle ganzzahligen Werthe, deren absoluter Betrag nicht grösser ist als n, so erhält man $(2n+1)^2$ Gleichungen. Von diesen sind zunächst alle diejenigen auflösbar, in denen $u = 0$ ist. Ihre Anzahl ist $2n+1$, welche gegen $(2n+1)^2$ mit wachsendem n verschwindet. Alle übrigen auflösbaren Gleichungen sind nach dem, was wir oben gesehn haben, jedenfalls nicht zahlreicher als die Anzahl aller Divisoren der Zahlen

$$25u^6 \qquad (u = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$$

vermehrt um die Anzahl aller reductibeln Gleichungen.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass auch diese Anzahl gegen $(2n+1)^2$ für hinreichend grosse Werthe von n verschwindend klein ist.

Die Anzahl der positiven und negativen Divisoren einer Zahl μ

$$\mu = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_\alpha^{\lambda_\alpha} \qquad (p_1, p_2, \ldots, p_\alpha \text{ Primzahlen})$$

ist gleich

$$2(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)\ldots(\lambda_\alpha + 1)$$

und das Verhältniss dieser Anzahl zu der Zahl selbst demnach gleich

$$2 \cdot \frac{\lambda_1 + 1}{p_1^{\lambda_1}} \cdot \frac{\lambda_2 + 1}{p_2^{\lambda_2}} \ldots \frac{\lambda_\alpha + 1}{p_\alpha^{\lambda_\alpha}}.$$

Diese Zahl ist, wenn λ die grösste der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ und p die grösste der Zahlen $p_1, \ldots, p_\alpha$ bezeichnet, zugleich nicht grösser als

$$2 \cdot \frac{\lambda + 1}{2^\lambda} \quad \text{und} \quad 2 \cdot \frac{2}{p}.$$

Denn hier sind alle Brüche ausser demjenigen, wo λ resp. p vorkommt, durch 1, d. h. den grössten Werth, welchen sie überhaupt annehmen können, ersetzt; der Bruch aber, wo λ resp. p vorkommt, ist ebenfalls durch seinen grössten Werth ersetzt, indem im ersten Falle der betref-

fende Primfactor gleich 2, im zweiten Falle der betreffende Exponent gleich 1 angenommen worden ist.

Lässt man nun μ sich unbegrenzt vergrössern, so können nicht λ und p zugleich unterhalb fester Grenzen bleiben. Denn da die Anzahl der Primzahlen, welche kleiner sind als p, sicherlich kleiner als p ist, so folgt, dass $\mu < p^{\lambda p}$. Nach Angabe irgend einer noch so grossen Zahl g braucht man also nur die Zahl μ grösser als g^{g^2} anzunehmen, um sicher zu sein, dass entweder λ oder p die Grenze g überschreitet. Mithin wird die Anzahl der Divisoren von μ mit wachsendem μ gegen μ unendlich klein; denn die beiden Zahlen

$$2 \cdot \frac{\lambda + 1}{2^\lambda} \quad \text{und} \quad 2 \cdot \frac{2}{p}$$

werden für hinreichend grosse Werthe von λ resp. p beliebig klein.

Die Anzahl der Divisoren von μ wird auch noch gegen die m^{te} Wurzel aus μ unendlich klein.

Denn sei g eine Zahl so gross, dass sowohl $\frac{2}{\sqrt[m]{g}}$ als $\frac{g+1}{2^{\frac{g}{m}}}$ kleiner als 1 ist, so wird in

$$2 \cdot \frac{\lambda_1 + 1}{p_1^{\frac{\lambda_1}{m}}} \cdot \frac{\lambda_2 + 1}{p_2^{\frac{\lambda_2}{m}}} \cdots \frac{\lambda_\alpha + 1}{p_\alpha^{\frac{\lambda_\alpha}{m}}}$$

jeder Factor, in welchem entweder λ oder p grösser als g ist, kleiner als 1 sein. Bezeichnen wieder λ und p die grössten unter diesen Zahlen, so ist also das Product aller derjenigen Factoren, in denen entweder λ oder p grösser als g ist, zugleich unter den beiden Grenzen

$$2 \cdot \frac{\lambda + 1}{2^{\frac{\lambda}{m}}} \quad \text{und} \quad 2 \cdot \frac{2}{p^{\frac{1}{m}}}$$

enthalten. Das Product der übrigen Factoren, in denen weder λ noch p grösser als g sind, liegt unterhalb einer von μ unabhängigen Grenze C, welche mit Hilfe von g bestimmt werden kann. Mithin ist das ganze Product zugleich kleiner als

$$2 \frac{\lambda + 1}{2^{\frac{\lambda}{m}}} \cdot C \quad \text{und} \quad 2 \frac{2}{p^{\frac{1}{m}}} \cdot C.$$

Da nun mit wachsendem μ nicht zugleich λ und p unter einer festen Grenze bleiben, so wird eine dieser beiden Grössen beliebig klein. Also ist die Anzahl der Divisoren von μ auch gegen $\sqrt[m]{\mu}$ beliebig klein, sobald μ hinreichend gross gewählt wird.

Bezeichne nun $f(n)$ die grösste unter den Anzahlen der Divisoren der einzelnen Zahlen

$$25u^6, \qquad (u=\pm 1, \ldots, \pm n)$$

so wird also $f(n)$ für hinreichend grosse Werthe von n gegen $\sqrt[6]{25n^6}$ also auch gegen n beliebig klein. Die Anzahl aller Divisoren der Zahlen

$$25u^6 \qquad (u=\pm 1, \ldots, \pm n)$$

zusammengenommen ist offenbar nicht grösser als $2nf(n)$ also das Verhältniss zu $(2n+1)^2$ kleiner als

$$\frac{f(n)}{2n+1}$$

und mithin für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein.

Es erübrigt nun nur noch zu zeigen dass auch die Anzahl der reductibeln Gleichungen unter den $(2n+1)^2$ betrachteten mit wachsendem n gegen $(2n+1)^2$ unendlich klein wird.

Zunächst erhält man für $v=0$ $2n+1$ reductible Gleichungen. Ihre Anzahl verschwindet gegen $(2n+1)^2$. Die übrigen reductibeln Gleichungen haben entweder einen rationalen Factor ersten oder einen solchen zweiten Grades.

Ein Factor ersten Grades hat die Form $x-a$, wo a eine ganze Zahl ist. a muss ein Theiler von v sein, und durch a und v ist alsdann vermittelst der Gleichung $a^5+ua+v=0$ die Grösse u bestimmt. Einem bestimmten Werthe von v entsprechen mithin nicht mehr ganzzahlige Gleichungen mit einem Factor ersten Grades, als die Anzahl der Divisoren von v beträgt. Im Ganzen erhalten wir also nicht mehr Gleichungen als die Anzahl der Divisoren der Zahlen

$$v \qquad (v=\pm 1, \ldots, \pm n)$$

zusammengenommen beträgt.

Von den reductibeln Gleichungen, welche einen Factor zweiten Grades enthalten, gilt etwas Ähnliches. Für dieselben muss die symmetrische

Function zweier Wurzeln z. B. $\tau = x_1 + x_2$ mindestens einen rationalen Werth haben. τ genügt einer Gleichung 10^{ten} Grades von der Form

$$\tau^{10} + m_1 u \tau^6 + m_2 v \tau^5 + m_3 u^2 \tau^2 + m_4 u v \tau + m_5 v^2 = 0.$$

$m_1, m_2, \ldots, m_5$ sind ganze Zahlen, von denen m_5 sicherlich von Null verschieden ist, wie man sogleich daran sieht, dass für $u = 0$, $v = -1$ keiner der Werthe von τ gleich Null ist. Setzt man $u = -1$, $v = 0$, so werden die Werthe von τ gleich $0, 0, \pm 1, \pm i, \pm(1 + i), \pm(1 - i)$.

Das ergiebt die Gleichung

$$\tau^2(\tau^2 - 1)(\tau^2 + 1)(\tau^2 + 2i)(\tau^2 - 2i) = \tau^2(\tau^4 - 1)(\tau^4 + 4)$$
$$= \tau^{10} + 3\tau^6 - 4\tau^2,$$

also $m_1 = -3$, $m_3 = -4$.

Soll nun für irgend welche ganzzahligen Werthe von u und v ein Factor zweiten Grades existiren, so muss jene Gleichung für τ eine ganzzahlige Wurzel besitzen. Dieselbe muss ein Divisor von $m_5 v^2$ sein. Setzt man für τ die sämmtlichen Divisoren von $m_5 v^2$ ein, so resultirt eine Anzahl Gleichungen, welche nicht identisch in u befriedigt werden, wenn wir von dem Fall $\tau = 0$, $v = 0$ absehn. Dieselben liefern uns für je einen Werth von τ höchstens zwei Werthe von u. Für einen gegebenen Werth von v giebt es also jedenfalls nicht mehr Gleichungen mit einem Factor zweiten Grades als die doppelte Anzahl der Divisoren von $m_5 v^2$ beträgt.

Im Ganzen erhalten wir demnach nicht mehr Gleichungen mit Factoren zweiten Grades als die doppelte Anzahl der Divisoren der Zahlen

$$m_5 v^2 \qquad (v = \pm 1, \ldots, \pm n)$$

beträgt.

Nach dem Früheren werden also auch die Anzahlen der Gleichungen mit Factoren ersten und zweiten Grades gegen $(2n + 1)^2$ beliebig klein und es gilt mithin der Satz:

Die Anzahl der unter den $(2n + 1)^2$ Gleichungen

$$x^5 + ux + v = 0 \qquad \begin{pmatrix} u = 0, \pm 1, \ldots, \pm n \\ v = 0, \pm 1, \ldots, \pm n \end{pmatrix}$$

enthaltenen auflösbaren Gleichungen ist für hinreichend grosses n gegen die Gesammtanzahl verschwindend klein.

IV.

Der Zusammenhang von σ, u, v, welcher durch die Gleichung (1) oder (2) constituirt wird, lässt sich auch dadurch ausdrücken, dass man die drei Grössen als Functionen zweier Parameter λ und μ darstellt. Es ist nun möglich für λ und μ zwei rationale Functionen von σ, u und v zu wählen und zwar dergestalt, dass σ, u, v rationale Functionen von λ und μ werden. Sobald also σ, u und v rational sind, so werden auch λ und μ rational sein und umgekehrt. Führt man nun die Ausdrücke von u und v durch λ und μ in die Gleichung

$$x^5 + ux + v = 0$$

ein, so erhält man also den allgemeinen Ausdruck der auflösbaren Gleichungen von dieser Form, abgesehn von denjenigen, welche reductibel sind und zugleich keine rationale metacyklische Function besitzen.

Dividirt man beide Seiten der Gleichung (2) durch u^6 und setzt $\frac{\sigma}{u} = \sigma'$, $\frac{v}{u} = v'$, so ergiebt sich:

$$(\sigma' - 1)^4(\sigma'^2 - 6\sigma' + 25) = 5^5 \frac{v'^4\sigma'}{u}$$

oder

$$u = \frac{5^5 v'^4 \sigma'}{(\sigma' - 1)^4(\sigma'^2 - 6\sigma' + 25)}.$$

Da $v = v'u$, $\sigma = \sigma' u$, so erkennt man, dass σ, u und v durch v' und σ' und zugleich v' und σ' durch σ, u und v rationa ausdrückbar sind.

Die Ausdrücke vereinfachen sich noch ein wenig, wenn wir λ und μ nicht direct gleich σ' und v' setzen. Es sei

$$\lambda = \frac{\sigma' - 3}{4}, \qquad \mu = \frac{5v'}{2(\sigma' - 1)},$$

also

$$\lambda = \frac{\sigma - 3u}{4u}, \qquad \mu = \frac{5v}{2(\sigma - u)}.$$

Dann ist

$$u = \frac{5\mu^4(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1}, \qquad v = \frac{4\mu^5(2\lambda + 1)(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1}, \qquad \sigma = \frac{5\mu^4(4\lambda + 3)^2}{\lambda^2 + 1}.$$

Wir haben mithin das folgende Resultat:

Giebt man λ und μ irgend zwei Werthe irgend eines Rationalitätsbereiches,[1] so ist

$$x^5 + \frac{5\mu^4(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1} x + \frac{4\mu^5(2\lambda + 1)(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1} = 0$$

oder auch

$$\left(\frac{x}{\mu}\right)^5 + \frac{5(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1}\left(\frac{x}{\mu}\right) + 4\,\frac{(2\lambda + 1)(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1} = 0$$

eine für diesen Rationalitätsbereich auflösbare Gleichung. Und umgekehrt ist jede *irreductible* auflösbare Gleichung von der Form $x^5 + ux + v = 0$ aus jenem Ausdrucke dadurch ableitbar, dass man für λ und μ zwei Grössen des betreffenden Rationalitätsbereichs einsetzt, nämlich die beiden Grössen

$$\frac{\sigma - 3u}{4u}, \qquad \frac{5v}{2(\sigma - u)}.$$

Auszunehmen sind nur diejenigen Gleichungen, für welche diese beiden Ausdrücke keine bestimmten Werthe von λ und μ liefern. Das kann nur sein, wenn entweder $u = 0$ oder $\sigma - u = 0$. Im letzteren Falle folgt aus (2), dass auch $v^4\sigma$ gleich Null ist. Wenn eine irreductible Gleichung vorliegt, so ist $v \gtrless 0$ mithin nothwendig $\sigma = 0$ und daher auch $u = 0$. In dem obigen Ausdrucke sind also alle irreductibeln Gleichungen von der Form $x^5 + ux + v = 0$ enthalten mit Ausnahme derjenigen, in denen $u = 0$ ist. Ferner sind in demselben auch reductible Gleichungen enthalten, aber nur diejenigen, für welche einer der Werthe von σ rational ist.

---

[1] Vergl. über diesen Begriff KRONECKER: *Grundzüge* etc. § 1, CRELLE's Journal, Bd. 92.

ÜBER $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}$ UND VERWANDTE INTEGRALE

VON

L. SCHLÄFLI

in BERN.

Im ersten Bande von CAUCHY's vollständigen Werken findet sich ein *Mémoire sur les intégrales définies* aus dem Jahre 1814, worin p. 442 (g) und p. 488 die erwähnten Integrale behandelt werden. CAUCHY setzt sich, wie er selbst sagt, nur die Berechnung der reellen Componenten der in dieser Abhandlung vorkommenden Integrale vor, und seine Ergebnisse sind meistens richtig, aber nicht immer. Dass der Begriff der *valeur principale* eines Integrales, den CAUCHY aufstellt, nicht statthaft sei, braucht nicht erörtert zu werden; was er so nennt, ist eine Summe von Integralen, die einander nichts angehn. Auch die *intégrale singulière* ist ein bedenklicher Begriff; wo er zum ersten Male erläutert wird, p. 394, geschieht es am Integrale

$$\iint \frac{x^2 - z^2}{(x^2+z^2)^2} dx\,dz \qquad (0 < x < 1,\ 0 < z < 1).$$

Niemand ist aber gehalten, dieses Doppelintegral zu verstehen, wenn über dessen Begränzung im Bereiche von ($x = 0$, $z = 0$) nichts gesagt wird. Setzt man

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} > 1, \qquad x < 1, \qquad z < 1$$

als Gränzen, wo α, β positiv, aber beliebig klein sind, so ist $-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\frac{\pi}{4}$

Werth des Integrales; für $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}>1$ ist er $-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\log\frac{\beta}{\alpha}$; wenn endlich das Rechteck $0<x<\alpha$, $0<z<\beta$ weggenommen wird, so ist er $\zeta-\frac{\pi}{4}$, wenn $\operatorname{tang}\zeta=\frac{\beta}{\alpha}$, $0<\zeta<\frac{\pi}{2}$. Cauchy gibt nur zwei Werthe, $\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ an.

1. Ich will mit den Beweise eines Hülfssatzes beginnen. Wenn

$$\log x=-\alpha+i\theta,\quad(\alpha>0,\ 0<\theta<2\pi),\quad \log t=i\varphi,\quad(0<\varphi<2\pi),$$

wo φ alle reellen Werthe zwischen diesen Gränzen durchlaufen soll, und wenn a keine ganze Zahl ist, so ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{x^\lambda}{\lambda-a}=-\frac{2i\pi\,.\,x^a}{e^{2i\pi a}-1}-\frac{1}{e^{2i\pi a}-1}\int x\frac{t^{a-1}-x^{a-1}}{t-x}\,dt;$$

man überzeugt sich auf graphischem Wege leicht davon, dass die Summe links noch convergiert, wenn auch $\alpha=0$ ist, wenn nur θ mit keiner der zwei Gränzen 0, 2π zusammen fällt. Im Integralausdrucke rechts umschliesst zwar der Weg jetzt noch beide Pole 0 und x; weil aber die zu integrierende Function im Bereiche von x den Charakter einer ganzen Function von $t-x$ hat, so verschwindet das um x allein geführte Integral, und der Weg darf sogar durch x gehn. Setzt man jetzt

$$x=e^{i\theta},\qquad(0<\theta<2\pi),\qquad a=ib,\qquad b\text{ reell},\qquad t=e^{i\varphi},$$

so kommt

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda i\theta}}{\lambda-ib}=\frac{i\pi}{\sin\pi b}e^{b(\pi-\theta)}+\frac{1}{4\sin\pi b}\int_0^{2\pi}\left(e^{b(\pi-\varphi)-\frac{1}{2}i(\varphi-\theta)}-e^{b(\pi-\theta)+\frac{1}{2}i(\varphi-\theta)}\right)\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}.$$

Ersetzt man hier b durch $-b$, zieht die so entstandene Gleichung von jener ab und dividiert durch $2i$, so kommt

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{b}{\lambda^2+b^2}e^{i\lambda\theta}=\pi\frac{\cos b(\pi-\theta)}{\sin\pi b}$$

$$+\frac{1}{4i\sin\pi b}\int_0^{2\pi}\left(\cos b(\pi-\varphi)\,.\,e^{-\frac{1}{2}i(\varphi-\theta)}-\cos b(\pi-\theta)\,.\,e^{\frac{1}{2}i(\varphi-\theta)}\right)\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}.$$

Vertauscht man nun θ, φ mit $2\pi-\theta$, $2\pi-\varphi$ und combiniert beide Gleichungen durch Addition und Subtraction, so ergeben sich die zwei Gleichungen

(a) $$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{b}{\lambda^2+b^2}\cos\lambda\theta=-\frac{1}{2b}+\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos b(\pi-\theta)}{\sin\pi b},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{b}{\lambda^2+b^2}\sin\lambda\theta=\frac{1}{4\sin\pi b}\int_0^{2\pi}[\cos b(\pi-\theta)-\cos b(\pi-\varphi)]\operatorname{cotg}\frac{\varphi-\theta}{2}\,d\varphi.$$

Wenn man in der letzten Gleichung innerhalb der Intervalle $0<\varphi<\theta$, $\theta<\varphi<2\pi$ statt φ resp. $\theta-\varphi$, $\theta+\varphi$ schreibt, so wird die rechte Seite zu

$$\frac{1}{4\sin\pi b}\left\{\int_0^{\theta}[\cos b(\pi-\theta+\varphi)-\cos b(\pi-\theta)]\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right.$$
$$\left.+\int_0^{2\pi-\theta}[\cos b(\pi-\theta)-\cos b(\pi-\theta-\varphi)]\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right\},$$

durch partielle Integration zu

$$\frac{b}{2\sin\pi b}\left[-\int_0^{\theta}\sin b(\pi-\theta+\varphi)\,.\log\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right.$$
$$\left.-\int_0^{2\pi-\theta}\sin b(\pi-\theta-\varphi)\,.\log\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right].$$

Der zweite Term innerhalb der Klammer zerfällt in $-\int_0^{\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi-\theta}^{2\pi}$; in den zwei letzten Theilen schreibe man $2\pi-\varphi$ statt φ. Dann bekommt man

(b) $$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{b}{\lambda^2+b^2}\sin\lambda\theta$$

$$=b\,\frac{\sin b\theta}{\sin\pi b}\int_0^{\pi}\cos b\varphi\,\log\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi-b\int_0^{\theta}\cos b(\theta-\varphi)\,\log\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

2. Ich bezeichne mit N eine sehr grosse positive Zahl, die bestimmt ist zuletzt unendlich zu werden, und nenne N, iN, $-N$, $-iN$ den Ostpunkt, Nordpunkt, Westpunkt, Südpunkt des Zahlenfeldes. Die Drehungsrichtung, in der diese Punkte jetzt aufgezählt worden sind, heisse *rechtläufig* oder *positiv*, die entgegensetzte *rückläufig* oder *negativ*.

Es seien a, b positiv, $\frac{a}{b}$ sei keine ganze Zahl, $A = \int_0^N \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}$, wenn x im allgemeinen die positive Axe durchläuft, aber jeder Wurzel der Gleichung $\sin bx = 0$ nach der Südseite hin (also durch eine halbe positive Drehung) in unmittelbarer Nähe ausweicht, und wenn auch $\frac{bN}{\pi}$ keine ganze Zahl ist. Setzt man $k = \frac{a}{b}$, so wird $A = \int_0^N \frac{\sin kx}{\sin x} \frac{b\,dx}{b^2+x^2}$ (Südseite), wo $\frac{N}{\pi}$ keine ganze Zahl sein soll. Wenn $k > 1$, so kann N nicht im geringsten aus der Realitätslinie entfernt werden; und doch will ich versuchen, A als Function von k aufzufassen. Wenn $k = m + i\mu$, $x = y - iz$, wo m, y, z positiv, μ reell, so ist

$$ikx = mz - \mu y + i(my + \mu z).$$

Wenn $mz - \mu y$ positiv ist, so verlangt die Convergenz des Integrales, dass $(m-1)z - \mu y$ negativ sei. Dann kann μ nur, wenn $0 < m < 1$, sowohl positiv als negativ sein; aber wenn $m \overline{\overline{>}} 1$, muss μ positiv sein, $\frac{\mu}{m} < \frac{z}{y} < \frac{\mu}{m-1}$. Wenn dagegen $mz - \mu y$ negativ ist, so erfordert die Convergenz, dass $(m+1)z - \mu y$ positiv sei, μ ist nothwendig positiv, $\frac{\mu}{m} > \frac{z}{y} > \frac{\mu}{m+1}$. Wenn also $m > 1$, μ angebbar positiv, so ist $\frac{z}{y}$ zwischen die zwei kleinen positiven Gränzen $\frac{\mu}{m+1}$, $\frac{\mu}{m-1}$ eingeschlossen; z wird zugleich mit y unendlich; die Variable x bekommt in der Ostgegend einen solchen Spielraum, dass man k durch negative halbe Drehungen über ganze Zahlen weg fortbewegen kann.

3. Ich will zuerst nur voraussetzen, dass k positiv und keine ganze Zahl sei. Dann schreibe ich

$$A = \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{ikx} - 1}{2i\sin x} \frac{b\,dx}{b^2 + x^2} + \int_0^{\varepsilon} \frac{1 - e^{-ikx}}{2i\sin x} \frac{b\,dx}{b^2 + x^2}$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{N} \frac{e^{ikx}}{2i\sin x} \frac{b\,dx}{b^2 + x^2} + \int_{\varepsilon}^{N} \frac{e^{-ikx}}{-2i\sin x} \frac{b\,dx}{b^2 + x^2}$$

$= I + II + III + IV$, wo die positive Zahl ε kleiner sowohl denn π als auch denn b gewählt sei. Beim Terme III kann man den Weg in kleine positive Kreise um die Pole π, 2π, 3π, ... und einen einfachen auf der Nordseite der Realitätslinie befindlichen Weg von ε nach N auflösen. Die Summe der Integrale längs der kleinen Kreise heisse B; dann ist

$$B = \sum_{\lambda=1} \frac{\pi b}{(\lambda\pi)^2 + b^2} e^{i\lambda\pi(k-1)}.$$

Es sei $III = B + III'$. In III' kann man das Ende des Weges durch eine positive Viertelsdrehung nach iN bringen, in IV durch eine negative Viertelsdrehung nach $-iN$; diese Wege mögen der lateralen Axe genähert werden ohne die Pole ib und $-ib$ zu überschreiten. In I und III' setze man $x = it$, in II und IV dagegen $x = -it$. Dann wird

$$A = B + \int_0^{-i\varepsilon} \frac{e^{-kt} - 1}{2\,\mathfrak{Sin}\,t} \frac{ib\,dt}{t^2 - b^2} + \int_0^{i\varepsilon} \frac{1 - e^{-kt}}{2\,\mathfrak{Sin}\,t} \frac{ib\,dt}{t^2 - b^2}$$

$$+ \int_{-i\varepsilon}^{N} \frac{e^{-kt}}{2\,\mathfrak{Sin}\,t} \frac{ib\,dt}{t^2 - b^2} \text{ (südlich von } b\text{)} + \int_{i\varepsilon}^{N} -\frac{e^{-kt}}{2\,\mathfrak{Sin}\,t} \frac{ib\,dt}{t^2 - b^2} \text{ (nördlich von } b\text{)}.$$

Man kann I und II zu einem Integrale $\int_{i\varepsilon}^{-i\varepsilon} \frac{e^{-kt} - 1}{2\,\mathfrak{Sin}\,t} \frac{ib\,dt}{t^2 - b^2}$ vereinigen, worin der Weg gerade von $i\varepsilon$ nach $-i\varepsilon$ durch 0 hindurch führt, dann den Weg durch einen negativen Halbkreis (also östlich von 0) ersetzen, und hat endlich

$$I + II = \int_{i\varepsilon}^{-i\varepsilon} \frac{e^{-kt}}{2\,\mathfrak{Sin}\,t} \frac{ib\,dt}{t^2 - b^2} \text{ (östlich)} + \int_{-i\varepsilon}^{i\varepsilon} \frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}\,t} \frac{ib\,dt}{t^2 - b^2} \text{ (pos. Halbkreis).}$$

Der erste Theil vereinigt sich mit III' und IV zu einem Integrale $\int \frac{e^{-kt}}{2\sin t}\frac{ibdt}{t^2-b^2}$ (mit rechtläufigem, b umschliessenden Wege) $= -\frac{\pi}{2}\frac{e^{-kb}}{\sin b}$. Ersetzt man im zweiten Theile t durch $-t$, so bleibt der Integralausdruck derselbe; aber der Weg geht nun auf der Westseite von $i\varepsilon$ nach $-i\varepsilon$ und ergänzt den vorigen Weg zu einem ganzen positiven Kreise um o. Dieser zweite Theil ist also gleich

$$\int \frac{1}{4}\frac{ib}{t^2-b^2}\frac{dt}{\sin t} \text{ (pos. Kreis um o) } = \frac{\pi}{2b}.$$

Jetzt ist

$$A = B + \frac{\pi}{2b} - \frac{\pi}{2}\frac{e^{-kb}}{\sin b},$$

und es bleibt nur noch übrig, B anders darzustellen.

Wenn $k = 2n - 1 + \alpha$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, 0 < \alpha < 2$), so ist vermöge der Formeln (a), (b):

$$B = \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{b}{\pi}\frac{e^{\lambda i\pi\alpha}}{\lambda^2+\left(\frac{b}{\pi}\right)^2} = -\frac{\pi}{2b} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos(b-b\alpha)}{\sin b}$$

$$+\, i\frac{b}{\pi}\left[\frac{\sin b\alpha}{\sin b}\int_0^{\pi}\cos\frac{b\varphi}{\pi}\log\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - \int_0^{\pi\alpha}\cos\left(b\alpha-\frac{b\varphi}{\pi}\right)\log\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right].$$

Endlich ergibt sich

$$(1)\quad \int_0^{\infty}\frac{\sin kx}{\sin x}\frac{bdx}{b^2+x^2} \text{ (südlich von } \pi, \ldots) = \frac{\pi}{2\sin b}\left[\cos(b-b\alpha) - e^{-kb}\right]$$

$$+\, i\frac{b}{\pi}\left[\frac{\sin b\alpha}{\sin b}\int_0^{\pi}\cos\frac{b\varphi}{\pi}\log\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - \int_0^{\pi\alpha}\cos\left(b\alpha-\frac{b\varphi}{\pi}\right)\log\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right].$$

4. Es ist schon gezeigt worden, dass die durch das Integral A dargestellte Function von k ihre Stetigkeit nicht verliert, wenn man k durch eine halbe negative Drehung um $2n+1$ wieder in die Realitätslinie bringt, während der Integrationsweg zugleich die nöthige Schwenkung nach Süden macht, und man dann k reell gegen $2n+3$ hin fortwachsen

lässt. Zur Probe werde noch untersucht, in welche Form die rechte Seite der Gleichung (1) übergeführt wird. Nur

$$-\int_0^{\pi\alpha} \cos\left(b\alpha - \frac{b\varphi}{\pi}\right) \log\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

bereitet einige Schwierigkeit, wenn $\alpha - 2$ in einem kleinen rückläufigen Halbkreise aus einem negativen Werthe in den positiven Werth β übergeht. Die Variable φ muss der Bewegung ihres letzten Werthes (d. i. $\pi\alpha$) folgen und werde nach Überschreitung von 2π mit $2\pi + u$ bezeichnet; dann ist $\log\sin\frac{\varphi}{2}$ in $-i\pi + \log\sin\frac{u}{2}$ übergegangen. Da der Radius des Halbkreises so klein gemacht werden kann als man nur will, und da $\int\limits_0 \log\varphi\, d\varphi$ zugleich mit ihm verschwindet, so geht das Integral in

$$-\int_0^{2\pi} \cos\left(2b + b\beta - \frac{b\varphi}{\pi}\right) \log\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi - \int_0^{\pi\beta} \cos\left(b\beta - \frac{bu}{\pi}\right)\left(-i\pi + \log\sin\frac{u}{2}\right) du$$

$$= -\int_0^{\pi}\left[\cos\left(2b + b\beta - \frac{b\varphi}{\pi}\right) + \cos\left(b\beta + \frac{b\varphi}{\pi}\right)\right] \log\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$+ i\frac{\pi^2}{b}\sin b\beta - \int_0^{\pi\beta} \cos\left(b\beta - \frac{b\varphi}{\pi}\right) \log\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

über, wo der erste Term durch

$$-2\cos(b + b\beta)\int_0^{\pi} \cos\left(b - \frac{b\varphi}{\pi}\right) \log\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

ersetzt werden kann. Die rechte Seite der Gleichung (1) ist nun

$$\frac{\pi}{2\sin b}\left[\cos(b + b\beta) - 2\sin b\sin b\beta - e^{-kb}\right]$$

$$+ i\frac{b}{\pi}\left[\left(\frac{\sin(2b + b\beta)}{\sin b} - 2\cos(b + b\beta)\right)\int_0^{\pi} \cos\frac{b\varphi}{\pi} \log\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi\right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi\beta} \cos\left(b\beta - \frac{b\varphi}{\pi}\right) \log\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi\right]$$

und geht bei weiterer Vereinfachung in die frühere Form über.

5. Man kann desshalb die Berechnung von A zuerst auf das Intervall $-1 < k < 1$ beschränken und nachher die gefundene Function von k schrittweise über die Unstetigkeitspunkte $k = 1, 3, 5, \ldots$ hinüber führen. Wenn man x durch $-x$ ersetzt, so bekommt man

$$A = \int_{-N}^{0} \frac{\sin kx}{\sin x} \frac{b\,dx}{b^2 + x^2} \text{ (Nordseite)},$$

durch Addition

$$2A = \int_{-N}^{N} \frac{\sin kx}{\sin x} \frac{b\,dx}{b^2 + x^2}$$

(der Weg liegt in der Westhälfte auf der Nordseite, in der Osthälfte auf der Südseite der Realitätslinie). Längs des ganzen Horizonts ist das Integral null. Man kann daher den Weg schliessen, indem man z. B. die Nordhälfte des Horizonts hinzu nimmt. Dann umgibt der Weg nur die Pole ib, π, 2π, 3π, ... und zwar rechtläufig; er zerfällt also in lauter kleine Kreise um diese Pole. Also ist

$$2A = \pi \frac{\mathfrak{sin}\, kb}{\mathfrak{sin}\, b} + 2i\pi b \sum_{\lambda=1} \frac{\sin \lambda\pi(k-1)}{(\lambda\pi)^2 + b^2},$$

divergiert in $k = -1, 1$. Setzt man $k = -1 + \alpha$ und gebraucht die Formeln (a) und (b), so hat man

(1′)
$$A = \frac{\pi}{2} \frac{\mathfrak{sin}\, kb}{\mathfrak{sin}\, b}$$

$$+ i\frac{b}{\pi}\left[\frac{\mathfrak{sin}\, b\alpha}{\mathfrak{sin}\, b}\int_0^\pi \mathfrak{cos}\frac{b\varphi}{\pi}\log\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - \int_0^{\pi\alpha}\mathfrak{cos}\left(b\alpha - \frac{b\varphi}{\pi}\right)\log\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right].$$

Da $\mathfrak{sin}\, kb = \mathfrak{cos}\, kb - e^{-kb} = \mathfrak{cos}(b - b\alpha) - e^{-kb}$, so stimmt diese Gleichung mit (1) überein.

6. Die drei übrigen Formeln (g) p. 442 bei Cauchy erledigen sich wie folgt

1°. $\displaystyle\int_0^N \frac{\cos kx}{\cos x} \frac{b\,dx}{b^2 + x^2}$ (Südseite, k positiv, keine ungerade Zahl)

$$= \int_0^N \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right)}{\sin x} \frac{2b\,dx}{(2b)^2+x^2} - \int_0^N \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right)}{\sin x} \frac{2b\,dx}{(2b)^2+x^2},$$

wird, wenn $k = 2n + \alpha$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; -1 < \alpha < 1)$,

$$(2) \qquad = \frac{\pi}{2\,\mathfrak{cos}\,b}\left[(-1)^n \mathfrak{sin}\,b\alpha + e^{-kb}\right]$$

$$+ (-1)^n i \frac{2b}{\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi\alpha} \log\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \mathfrak{cos}\left(b\alpha - \frac{2b\varphi}{\pi}\right) d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{\mathfrak{cos}\,b\alpha}{\mathfrak{cos}\,b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\,\mathfrak{cos}\,\frac{2b\varphi}{\pi}\,d\varphi\right].$$

2°. Multipliciert man die Formel (2) mit $bd\alpha$ und integriert von $\alpha = 0$ an, so sieht man, dass die Kentniss des Integrals

$$\int_0^N \frac{\sin 2nx}{x\cos x} \frac{b^2 dx}{b^2+x^2} \text{ (Realitätslinie), sei } = C,$$

erfordert wird. Weil

$$\frac{\sin 2nx}{\cos x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} (-1)^{n-\lambda-1} \cdot 2\sin(2\lambda+1)x,$$

$$\int_0^N 2\frac{\sin(2\lambda+1)x}{x} \frac{b^2 dx}{b^2+x^2} = \pi\left(1 - e^{-(2\lambda+1)b}\right),$$

so ist

$$C = \pi \sin^2\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n - e^{-2nb}}{\mathfrak{cos}\,b}.$$

Daher ist

$$(3)\quad \int_0^N \frac{\sin kx}{x\cos x}\,\frac{b^2dx}{b^2+x^2}\ (\text{Südseite}) = \pi\sin^2\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\,\frac{(-1)^n \operatorname{\mathfrak{cos}} ba - e^{-kb}}{\operatorname{\mathfrak{cos}} b}$$

$$+ (-1)^n i\frac{2b}{\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi\alpha}\log\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{\mathfrak{cos}}\left(b\alpha-\frac{2b\varphi}{\pi}\right)d\varphi\right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{\mathfrak{sin}} b\alpha}{\operatorname{\mathfrak{cos}} b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{\mathfrak{cos}}\frac{2b\varphi}{\pi}\,d\varphi\right]$$

für $k = 2n + \alpha$ $(-1 < \alpha < 1,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

3°. Wenn man die Formel (1), worin $k = 2n - 1 + \alpha$, $(0 < \alpha < 2$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, mit $\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial\alpha}$ behandelt, so kommt

$$(4)\quad \int_0^N \frac{\cos kx}{\sin x}\,\frac{xdx}{b^2+x^2}\ (\text{Südseite})$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-kb} - \operatorname{\mathfrak{sin}}(b-b\alpha)}{\operatorname{\mathfrak{sin}} b} - i\log\sin\frac{\pi\alpha}{2}$$

$$+ i\frac{b}{\pi}\left[\frac{\operatorname{\mathfrak{cos}} b\alpha}{\operatorname{\mathfrak{sin}} b}\int_0^{\pi}\operatorname{\mathfrak{cos}}\frac{b\varphi}{\pi}\log\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - \int_0^{\pi\alpha}\operatorname{\mathfrak{sin}}\left(b\alpha-\frac{b\varphi}{\pi}\right)\log\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right].$$

Wenn k einer ungeraden Zahl gleich wird, so wird das Integral links sinnlos.

Die Gleichungen (1), .., (4) entsprechen den mit (g) bezeichneten p. 442 bei Cauchy.

Bern, 13 Aug. 1885.

BEWEIS EINES SATZES
AUS DER
THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

M. FALK
in UPSALA.

Wenn man von dem Gebiete der Grösse k^2 alle reelle Werthe von $-\infty$ bis 0 und von $+1$ bis $+\infty$ (0 und $+1$ inclus.) ausschliesst und jeder der Quadratwurzeln $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ und $\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}$, wo

$$k'^2 = 1 - k^2$$

ist, denjenigen Werth beilegt, dessen erste Coordinate (der reelle Bestandtheil) positiv ist, so sind die Grössen K und K' durch die Werthe der bestimmten Integrale:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}$$

in eindeutiger Weise definirt.

Es handelt sich alsdann darum zu beweisen, dass K, K' immer endlich und von Null verschieden bleiben und dass K, K' und $\frac{K'}{K}$ *positive* erste Coordinaten haben.

Führt man die Bezeichnungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} k^2 &= \alpha + \beta i \quad, & k'^2 &= \alpha' + \beta' i \\ P &= 1 - \alpha \sin^2\varphi, & P' &= 1 - \alpha' \sin^2\psi \\ Q &= \beta \sin^2\varphi \quad, & Q' &= \beta' \sin^2\psi \end{aligned}$$

ein, so hat man, da $k^2 + k'^2 = 1$ ist

$$(2)\qquad \alpha + \alpha' = 1, \qquad \beta + \beta' = 0.$$

Setzt man ausserdem:

$$(3)\qquad \begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\, d\varphi, & B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\, d\varphi, \\ A' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{P' + \sqrt{P'^2 + Q'^2}}}{\sqrt{P'^2 + Q'^2}}\, d\psi, & B' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{-P' + \sqrt{P'^2 + Q'^2}}}{\sqrt{P'^2 + Q'^2}}\, d\psi, \end{aligned}$$

indem man allen hierin vorkommenden Quadratwurzeln ihre positiven Werthe beilegt, so ergeben sich für K und K' die Ausdrücke:

$$\sqrt{2}\,.\,K = A + \varepsilon B i, \qquad \sqrt{2}\,.\,K' = A' - \varepsilon B' i,$$

wo für ε $+1$ oder -1 zu setzen ist, je nachdem β positiv oder negativ ist.

Da unter den gemachten Voraussetzungen die Wurzeln: $\sqrt{P^2 + Q^2}$ und $\sqrt{P'^2 + Q'^2}$ nie verschwinden, so sind K und K' immer endlich. Aus den Gleichungen (3) ist unmittelbar ersichtlich, sowohl dass K und K' immer von Null verschieden bleiben, als auch dass sie positive erste Coordinaten (A und A') haben.

Ferner ist:

$$(4)\qquad \frac{K'}{K} = \frac{AA' - BB'}{A^2 + B^2} - \varepsilon \frac{AB' + A'B}{A^2 + B^2} i;$$

also wird bewiesen, dass die erste Coordinate von $\frac{K'}{K}$ positiv ist, indem man zeigt, dass $AA' - BB' > 0$ ist.

Aus den Gleichungen (3) ergibt sich:

$$AA' - BB' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{T}{\sqrt{P^2+Q^2}\sqrt{P'^2+Q'^2}}\,d\varphi\,d\psi,$$

wo

$$(5)\quad T = \sqrt{P+\sqrt{P^2+Q^2}}\cdot\sqrt{P'+\sqrt{P'^2+Q'^2}} - \sqrt{-P+\sqrt{P^2+Q^2}}\cdot\sqrt{-P'+\sqrt{P'^2+Q'^2}}$$

ist. Folglich hat man, um das Behauptete zu beweisen, nur zu zeigen, dass T für alle Werthepaare φ, ψ innerhalb des Gebietes dieser Grössen immer positiv bleibt.

Aus den Gleichungen (1) und (5) geht unmittelbar hervor, dass die immer reell bleibende Grösse T sich mit φ und ψ stetig ändert; und da für $\varphi = \psi = 0$

$$T_0 = 2$$

ist, so genügt es offenbar nachzuweisen, dass T für kein Werthepaar φ, ψ verschwinden kann, um daraus schliessen zu können, dass T immer positiv bleibt.

Aus der Gleichung (5) folgt, da QQ' nie positiv ist,

$$T^2 = 2(PP' + QQ' + \sqrt{P^2+Q^2}\cdot\sqrt{P'^2+Q'^2});$$

damit T verschwinde, ist also nothwendig, dass

$$(P^2+Q^2)(P'^2+Q'^2) = (PP'+QQ')^2$$

oder

$$PQ' - P'Q = 0$$

werde. Da aber, weil $\beta = -\beta'$ und $\alpha + \alpha' = 1$ ist,

$$PQ' - P'Q = \beta'(\sin^2\varphi + \sin^2\psi\cos^2\varphi)$$

ist, so könnte T also nur für $\varphi = \psi = 0$ verschwinden. Aber für

$\varphi = \psi = 0$ war $T_0 = 2$; also ist T und folglich auch die erste Coordinate von $\frac{K'}{K}$ immer positiv.

Dieser Beweis setzt voraus, dass β von Null verschieden ist; da aber für $\beta = 0$ die Grössen K und K' beide reell und positiv sind, so ist der Satz vollständig bewiesen.

Berlin, August 1885.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER QUADRATISCHE FORMEN.

I. BESTIMMUNG DER ANZAHL VERSCHIEDENER FORMEN, WELCHE EIN GEGEBENES GENUS ENTHÄLT.

VON

HERMANN MINKOWSKI

in KOENIGSBERG i/Pr.

In meiner Arbeit »*Sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers*»[1] habe ich den Begriff des Genus lediglich aus dem Begriffe der Formencongruenz hergeleitet. Ein solches Verfahren erwies sich bereits dort als äusserst vortheilhaft. Seine Berechtigung wird vielleicht noch schärfer durch die folgenden Entwickelungen hervortreten. Ich werde mich hier mit jenen Zahlen beschäftigen, welche im Falle allgemeiner Genera dieselbe Rolle spielen, wie im Falle binärer Genera die Classenanzahlen. Gewisse Sätze über Formencongruenzen werden zunächst errathen lassen, in welcher Gestalt sich die Ausdrücke jener Zahlen darbieten müssen. Unter Anwendung DIRICHLET'scher Principien soll alsdann gezeigt werden, dass die errathenen Formeln in Wirklichkeit richtig sind.

[1] Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Tome XXIX, N° 2 (1884). — Ich citire diese Arbeit im Folgenden kurz mit *F. Q.*

Einleitung.

1. *Ein Genus und seine Formenanzahl.*

Unter den *Resten* einer quadratischen Form $f = \sum_1^n a_{ik} x_i x_k$ in Bezug auf einen Modul N verstehen wir alle diejenigen Formen, welche aus f hervorgehen, indem die Coefficienten a_{ik} in beliebiger Weise um Vielfache des Moduls N geändert werden.

Wir nennen zwei Formen f und g (von derselben Variabelnzahl n) *congruent* in Bezug auf einen Modul N, $f \simeq g \pmod{N}$, wenn es lineare Substitutionen von einer Determinante $\equiv 1 \pmod{N}$ giebt, durch welche die Reste der einen Form für den Modul N in Reste der anderen Form für den Modul N übergehen.

Wir betrachten ausschliesslich Formen von nichtverschwindender Determinante.

Es kann der Fall eintreten, dass zwei Formen f und g *für einen jeden beliebigen Modul* congruent sind. Solches findet offenbar immer statt, wenn f und g derselben Classe äquivalenter Formen angehören, d. i. durch ganzzahlige Substitutionen von der Determinante 1 in einander übergehen. Es ereignet sich überhaupt dann und nur dann, wenn f und g dieselbe Determinante Δ besitzen, und in Bezug auf den Modul 2Δ congruent sind.

Immer und nur dann, wenn die Formen f und g diesen Bedingungen genügen, und dazu einen gleichen Trägheitsindex liefern, wird es möglich sein, die eine dieser Formen in die andere durch solche linearen Substitutionen von der Determinante 1 überzuführen, in welchen die Coefficienten rationale Zahlen mit einem zu 2Δ relativ primen Generalnenner sind. [1]

---

[1] Henry I. Stephen Smith, Phil. Trans., CLVII, 1867 (*On the Orders and Genera of Ternary Quadratic Forms*, art. 12) und: Roy. Soc. Proc., XVI, 1868 (*On the Orders and Genera of Quadratic Forms containing more than three Indeterminates*, p. 202).

Alle Formen, welche denselben Trägheitsindex I haben wie eine gegebene Form, und welche mit dieser Form für einen jeden beliebigen Modul congruent sind, fassen wir in ein *Genus* zusammen. Da die Formen eines Genus eine feste Determinante besitzen, so können sie, nach bekannten Sätzen, nur in eine endliche Anzahl verschiedener Formenclassen zerfallen.

Es ist aber im Allgemeinen nicht sowohl die Anzahl dieser *Classen*, welche sich durch einfache Formeln ausdrücken lässt, als vielmehr die Anzahl der in einem Genus enthaltenen *Formen*. Zwar ist die letztere Anzahl stets eine unendliche, denn schon jede einzelne Formenclasse besitzt unendlich viel Formen. Doch zeigt es sich bald, dass für ein jedes Genus eine gewisse, positiv unendliche Grösse Ω existirt, welche nur von den einfachsten Invarianten des Genus abhängt, und zu welcher alle die Formenanzahlen der einzelnen Classen des Genus in endlichen Verhältnissen stehen. Dieses Ω bestimmt dann auch den Grad, in welchem die Formenanzahl des gesammten Genus unendlich wird. Fällt die Formenanzahl in einer oder in mehreren Classen des Genus gleich $M.\Omega$ aus, so bezeichnen wir die positive endliche Grösse M als das *Maass* der betreffenden Classen.

Am einfachsten gestaltet sich der Begriff des Maasses für definite Formen, also in den Fällen $I = 0$ und $I = n$, mit welchen wir uns später hauptsächlich beschäftigen werden. Man weiss, dass eine definite quadratische Form f immer nur eine endliche Anzahl von Transformationen von der Determinante 1 in sich zulässt. Sei $t(f)$ diese Anzahl. Nennen wir ferner Ω_0 die Anzahl aller möglichen linearen ganzzahligen Substitutionen S von n Reihen und von der Determinante 1. Würden wir alle diese S auf die Form f anwenden, so müssten wir zu einer jeden Form der Classe f gelangen, und zwar zu einer jeden genau $t(f)$ Mal. Die Anzahl der verschiedenen Formen der Classe f wird daher $\frac{1}{t(f)}.\Omega_0$ betragen. Wählen wir demnach, was in der That geschehen soll, im Falle definiter Formen die erwähnte Grösse $\Omega = \Omega_0$, so können wir als das Maass einer definiten Classe f die Grösse $\frac{1}{t(f)}$ erklären. Das Maass für die Formenanzahl eines definiten Genus wird dann $\sum \frac{1}{t(f)}$ sein, wo die Summe über alle verschiedenen Classen f des Genus zu erstrecken ist.

In solchen speciellen Fällen, wo die Grösse $t(f)$ constant ausfällt für alle Formen eines Genus, ergiebt die vorstehende Summe einfach den $t(f)^{\text{ten}}$ Theil der Classenanzahl des Genus. Derartige Fälle sind Regel bei binären Formen. Man hat da gewöhnlich $t(f) = 2$. Nur für die Classen $f = d(x^2 + y^2)$ wird $t(f) = 4$, und für die Classen $f = 2d(x^2 + xy + y^2)$ wird $t(f) = 6$.

Ich bemerke noch beiläufig, dass die Grösse Ω_0 sich mit der $(n^2 - 1)^{\text{ten}}$ Potenz der Anzahl ω aller möglichen ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ vergleichen lässt. Es gilt nämlich in gewissem Sinne die Beziehung:

$$\Omega_0 = \frac{\omega^{n^2-1}}{S_2 S_3 \ldots S_n},$$

wo

$$S_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

Eine Deutung des Maassbegriffes für indefinite Formen soll den Gegenstand einer späteren Arbeit bilden. Ich erwähne nur, dass als Maass einer primitiven binären Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ von einer negativen, nicht quadratischen Determinante $ac - b^2 = -D < 0$ am passendsten der Ausdruck $\dfrac{\pi}{\log\left(\dfrac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}\right)}$ festgesetzt wird, wo $\sigma (= 1, 2)$ den grössten Theiler der Coefficienten a, $2b$, c bedeutet, und wo T und U die zwei kleinsten positiven Zahlen sind, welche der Gleichung $T^2 - DU^2 = \sigma^2$ Genüge leisten.

2. *Das vollständige System von Invarianten eines Genus.*

Um ein Genus eindeutig zu characterisiren, bedarf es nicht durchaus der Kentniss einer seiner Formen. Es genügt bereits, wenn man im Stande ist, sein *vollständiges System von Invarianten* anzugeben. Wir verstehen unter dieser Bezeichnung eine Reihe von Grössen, welche sich als arithmetische Functionen einer repräsentirenden Form f des Genus darstellen lassen, und welche die doppelte Eigenschaft haben, einmal: ungeändert zu bleiben, so oft die Form f durch eine andere Form *desselben*

Genus ersetzt wird, dann aber: in ihrer Gesammtheit sich stets zu ändern, sobald für f irgend eine Form eines *anderen* Genus genommen wird.

Ein vollständiges System von Invarianten eines Genus f umfasst die folgenden Grössen:

1° den Trägheitsindex I der Form f. Derselbe sagt aus, wie viele Quadrate mit dem Vorzeichen Minus auftreten, sobald f durch irgend eine reelle Substitution in eine Summe von n, zum Theil positiven, zum Theil negativen Quadraten transformirt wird.

2° die n Invarianten d_0; $o_1, o_2, \ldots, o_{n-1}$, und die $n-1$ Invarianten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ der Form f.

Die Invariante d_0 stellt den positiven grössten gemeinsamen Theiler der Coefficienten a_{ik} von f vor.

Zu den Invarianten o_h gelangt man in folgender Weise. Man bezeichne mit $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ die positiven grössten gemeinsamen Theiler aller 2-, 3-, ..., n-reihigen Unterdeterminanten von $|a_{ik}|$, sodass insbesondere $\Delta = (-1)^I . d_{n-1}$ kommt. Aus den Zahlen d_h entstehen die Invarianten o_h vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{d_1}{d_0^2} = o_1, \qquad \frac{d_2}{d_0^3} = o_1^2 o_2, \ \ldots, \ \frac{d_{n-1}}{d_0^n} = o_1^{n-1} o_2^{n-2} \ldots o_{n-1},$$

oder

$$o_h = \frac{d_h d_{h-2}}{d_{h-1}^2}.$$

Die Invarianten σ sind Grössen von den Werthen 1 oder 2. Man hat $\sigma_h = 1$, wenn unter den symmetrischen h-reihigen Minoren von f sich solche vorfinden, die, von dem Factor d_{h-1} befreit, ungerade ausfallen; dagegen $\sigma_h = 2$, wenn diese Minoren alle durch $2d_{h-1}$ aufgehen.

Die Grössen o_h sind stets ganze Zahlen, und die Grössen σ_h müssen den folgenden Bedingungen genügen:

(1). Die Zahlen $\sigma_{h-1} o_h \sigma_{h+1}$ und σ_h dürfen nicht zugleich durch 2 theilbar sein.

(2). Die Quotienten $\frac{\sigma_{h-1} o_h}{\sigma_{h+1}}$ und $\frac{o_h \sigma_{h+1}}{\sigma_{h-1}}$ müssen ganz sein.

Wir führen noch die Invarianten ein: $\sigma_0 = 1$, $\sigma_n = 1$ und $o_0 = 0$, $o_n = 0$.

3°. die *Charactere* der Form f. Dieses sind eine Reihe von Einheiten

± 1, welche in Gestalt LEGENDRE'scher Symbole auftreten. Um sie möglichst einfach darzustellen, trifft man am besten folgende Voraussetzung über die repräsentirende Form f: Die aus den ersten $h(=1, 2, \ldots, n-1)$ Reihen von f gebildeten symmetrischen Minoren sollen Werthe $\sigma_h d_{h-1} \varphi_h$ ergeben von solcher Art, dass ein jedes φ_h relativ prim zu $2 o_1 o_2 \ldots o_{n-1}$ und zu φ_{h-1} und φ_{h+1} ausfällt. Dabei hat man sich noch $\varphi_0 = 1$ und $\varphi_n = (-1)^I$ zu denken. Nach *F. Q.*, p. 83, lassen sich in jeder Classe des Genus Formen f von dieser Eigenthümlichkeit finden; man nennt sie *characteristische Formen.*

Es sei allgemein $\mathfrak{c}_h$ das Vorzeichen von φ_h; ferner mag I_h angeben, wie viele von den Einheiten $\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{c}_0}, \frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}, \ldots, \frac{\mathfrak{c}_h}{\mathfrak{c}_{h-1}}$ negativ ausfallen, sodass insbesondere $I_0 = 0$ und $I_n = I$ zu nehmen ist. Für eine characteristische Form f erweisen sich folgende Einheiten C als Charactere:

1) wenn $\sigma_{h-1} o_h \sigma_{h+1}$ durch eine ungerade Primzahl p theilbar ist, die Einheit

$$\left(\frac{\varphi_h}{p}\right);$$

2) wenn $\sigma_{h-1} o_h \sigma_{h+1} \equiv 0 \pmod 4$ ist, die Einheiten

$$(-1)^{\frac{\varphi_h - 1}{2}}, \qquad \left(\frac{\varphi_{h-1}}{\mathfrak{c}_h \varphi_h}\right)(-1)^{\frac{I_h(I_h-1)}{2}}, \qquad \left(\frac{\varphi_{h+1}}{\mathfrak{c}_h \varphi_h}\right)(-1)^{\frac{I_h(I_h+1)}{2}};$$

3) wenn $\sigma_{h-1} o_h \sigma_{h+1} \equiv 0 \pmod 8$ ist, die Einheit

$$\left(\frac{-2}{\varphi_h}\right).$$

Diese Einheiten C bilden zusammen mit den Grössen I, d_0, o_h, σ_h wirklich ein vollständiges System von Invarianten für das betrachtete Genus, sodass kein zweites Genus da sein kann, welches zu eben diesen Invarianten führt.

Die Einheiten C müssen alle Bedingungen erfüllen, welche sich für sie aus den quadratischen Congruenzen

$$\text{(h)} \qquad -\sigma_{h-1} o_h \sigma_{h+1} \varphi_{h-1} \varphi_{h+1} \equiv X_h^2 \pmod{\sigma_h^2 \varphi_h}$$

erschliessen lassen. Man findet diese Bedingungen in *F. Q.*, pp. 87—88, zusammengestellt.

Es gilt der Satz:

(G) Wenn die Invarianten I, d_0, o, σ und die Charactere C in beliebiger Weise festgesetzt werden, doch so, dass sie den Bedingungen (1), (2) genügen, ferner allen Bedingungen, welche aus den Congruenzen (h) folgen, so existirt wirklich ein Genus, welches zu diesen Invarianten und Characteren Veranlassung giebt.

Ein Beweis dieses Satzes ist *F. Q.*, pp. 89—90, mit Hilfe des bekannten Theoremes über die arithmetischen Progressionen geführt. Ich habe dort diesen Hilfssatz $n-1$ Mal hintereinander angewandt zur successiven Auffindung von $n-1$ Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ für eine characteristische Form des gewünschten Genus. Man überzeugt sich aber leicht, dass es immer genügt, ein einziges Mal von diesem Satze Gebrauch zu machen, nämlich um allein φ_{n-1} als Primzahl zu bestimmen; und man sieht dann ferner, dass in den Fällen $n \geqq 3$ dieser Hilfssatz sich ganz entbehren lässt, wenn nur der Satz (G) bereits für $n = 2$ bewiesen ist.

Alle Formengenera, welche dieselben Werthe der Grössen I, d_0, o_h, σ_h besitzen, werden in eine *Ordnung*

$$d_0, \qquad \begin{pmatrix} \sigma_1, & \sigma_2, & \ldots, & \sigma_{n-1} \\ o_1, & o_2, & \ldots, & o_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad I$$

zusammengefasst.

Wir beschäftigen uns meist mit Formen f, deren d_0 gleich 1 ist, und die man *primitive* Formen nennt. Im Falle die Grösse d_0 einer Form f relativ prim zu einer Zahl N ist, heisst diese Form primitiv in Bezug auf N.

Erster Theil.

3. *Die Anzahl der Reste eines Genus in Bezug auf einen Modul N.*

Wir wollen zunächst untersuchen, wieviel verschiedene Formenreste ein gegebenes Genus in Bezug auf einen gegebenen Modul N liefert. In der Anzahl dieser Formenreste finden wir einen Divisor der Formenanzahl des Genus, und wir werden so alle wesentlichen Factoren kennen lernen, aus welchen sich die Ausdrücke für die Formenanzahl zusammensetzen.

Das Genus möge durch eine beliebige seiner Formen, f, repräsentirt werden. Es ist dann klar, dass wir die Reste des Genus nach dem Modul N nur unter denjenigen Formen suchen dürfen, welche $\simeq f \pmod{N}$ sind. Man gelangt zu diesen Formen, indem man auf f ein vollständiges System von lauter incongruenten Substitutionen T von einer Determinante $\equiv 1 \pmod{N}$ anwendet. Ein solches System wird leicht bestimmt. Man braucht beispielsweise nur von den N^{n^2} incongruenten Substitutionen

$$x_i \equiv \sum_k t_i^k y_k \pmod{N}, \qquad t_i^k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n)}$$

alle diejenigen fortzulassen, in welchen die Determinante nicht $\equiv 1 \pmod{N}$ ausfällt.

In dem Systeme der T mögen sich im Ganzen $\mathfrak{N}$ Substitutionen finden lassen, — etwa die folgenden: $T_1, T_2, \ldots, T_{\mathfrak{N}}$, durch welche f in $\mathfrak{N}$ verschiedene Reste: $g_1, g_2, \ldots, g_{\mathfrak{N}} \pmod{N}$ übergehe. Das gegebene Genus enthält dann sicher nicht mehr als diese $\mathfrak{N}$ Reste. Wir behaupten aber, dass diese Reste wirklich alle dem gegebenen Genus, ja schon der (ganz beliebigen) Classe f eigen sind.

In der That, zu jeder Substitution

$$T \equiv \begin{vmatrix} x_1, & \cdots\cdots \\ x_2, & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots \\ x_n, & \cdots\cdots \end{vmatrix} \equiv 1 \pmod{N}$$

lässt sich immer eine nach dem Modul N congruente Substitution S von einer Determinante 1 bestimmen. Im Falle $n = 1$ leuchtet dieses unmittelbar ein. Wenn $n > 1$ ist, so bedienen wir uns zum Beweise eines Schlusses von $n - 1$ auf n. Offenbar muss der grösste Theiler der n Zahlen x_i zu N relativ prim sein. Man kann daher n Zahlen $\xi_i \equiv x_i \pmod{N}$ finden, deren grösster Theiler gleich 1 ist. Alsdann lässt sich bekanntlich eine Substitution

$$S_0 = \begin{vmatrix} \xi_1, & \cdots\cdots \\ \xi_2, & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots \\ \xi_n, & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

von der Determinante 1 bilden (*F. Q.*, p. 98). Das Product $S_0^{-1}.T$ gewinnt jetzt die Form

$$U \equiv \begin{vmatrix} 1, & U_1, & \ldots, & U_{n-1} \\ 0, & u_1^1, & \ldots, & u_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & u_{n-1}^1, & \ldots, & u_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \equiv 1 \pmod{N}.$$

Ist unser Lemma bereits für den Fall $n-1$ erwiesen, so können wir an Stelle der u_i^k solche congruente Zahlen einführen, dass $|u_i^k|$ in 1 übergeht. Ferner setzen wir an Stelle der ersten Verticalreihe von U einfach die Zahlen 1, 0, ..., 0. Auf diese Weise wird U in eine congruente Substitution V von der Determinante 1 übergehen, und das Product $S_0.V = S$ erscheint als eine mit T congruente Substitution von der Determinante 1.

Wir können so zu allen Substitutionen $T_1, T_2, \ldots, T_{\mathfrak{N}}$ congruente Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_{\mathfrak{N}}$ von der Determinante 1 bilden. Durch diese muss sich f in äquivalente Formen mit den Resten $g_1, g_2, \ldots, g_{\mathfrak{N}}$ verwandeln, was zu beweisen war.

Es ist nun leicht plausibel zu machen, dass die Formenanzahl der Classe f ein Vielfaches der Zahl $\mathfrak{N}$ wird. Man denke sich zu dem Behufe in der Classe f alle verschiedenen Formen gekennzeichnet, welche nach dem Modul N den Rest f lassen, und für jede dieser Formen je eine Substitution S notirt, durch welche dieselbe aus f entsteht. Durch Anwendung aller $S.S_1, S.S_2, \ldots, S.S_{\mathfrak{N}}$ müssen dann aus f die sämmtlichen Formen der Classe f hervorgehen, und zwar eine jede ein einziges Mal. Die Zahl $\mathfrak{N}$ theilt somit wirklich in gewissem Sinne die (unendliche) Formenanzahl der Classe f, und da diese Classe eine beliebige ist, auch die Formenanzahl des gesammten Genus, wie am Anfange ausgesprochen war.

Um einen Ausdruck für die Zahl $\mathfrak{N}$ zu gewinnen, verfährt man folgendermaassen. Es sei $\phi_n(N)$ die Anzahl der Individuen eines vollständigen Systemes von incongruenten Substitutionen T von einer Determinante $\equiv 1 \pmod{N}$. Alle diejenigen T, welche auf den Rest $f \pmod{N}$ ohne Wirkung bleiben, nenne man T, und es sei $f(N)$ die Anzahl der ver-

schiedenen T. Die Substitutionen $\mathsf{T}\,.\,T_1$, $\mathsf{T}\,.\,T_2$, ..., $\mathsf{T}\,.\,T_{\mathfrak{N}}$ müssen das gesammte System der T erschöpfen, und man erhält so:

$$\mathfrak{N} = \frac{\psi_n(N)}{f(N)}.$$

In welcher Weise die Grösse $\psi_n(N)$ gefunden wird, ist bekannt.[1] Damit ein $T \equiv 1 \pmod{N}$ ausfalle, ist zunächst erforderlich, dass die n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der ersten Verticalreihe ohne gemeinsamen Theiler mit N gewählt seien. Eine solche Wahl kann auf $N^n.(N)_n$ Arten geschehen, wenn $(N)_n$ das über alle verschiedenen Primzahlen q von N ausgedehnte Product $\prod\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$ bedeutet. Man sieht leicht, dass zu jedem, ohne Theiler mit N gewählten Systeme x_i mindestens ein T gehört. Alle möglichen T mit der ersten Verticalreihe x_i folgen dann durch Zusammensetzung dieses einen mit den verschiedenen Substitutionen $U \equiv 1 \pmod{N}$. In U unterliegen die $n-1$ Zahlen U_i gar keiner Beschränkung. Es lassen sich also im Ganzen $N^{n-1}.\psi_{n-1}(N)$ incongruente U bilden, und man erlangt die Beziehung:

$$\psi_n(N) = N^{2n-1}.(N)_n.\psi_{n-1}(N).$$

Da nun $\psi_1(N) = 1$ ist, so entsteht

$$\psi_n(N) = N^{n^2-1}.(N)_2.(N)_3\ldots(N)_n.$$

Es handelt sich also wesentlich um die Bestimmung der Grössen $f(N)$. Dabei genügt es, den Fall zu untersuchen, wo N eine Primzahlpotenz q^t ist.

Denn setzt N sich aus mehreren Primzahlpotenzen q^t zusammen, $N = \Pi q^t$, so hat man $f(N) = \Pi f(q^t)$.

So oft nämlich eine Substitution $\mathsf{T} \equiv 1 \pmod{N}$ ist, ergiebt sich dieselbe auch $\equiv 1$ nach jedem der Moduln q^t, und ändert sie den Rest $f \pmod{N}$ nicht, so ändert sie auch keinen der Reste $f \pmod{q^t}$. Liegt andererseits für einen jeden Modul q^t ein T_q vor, von einer Determinante $\equiv 1 \pmod{q^t}$, welches auf $f \pmod{q^t}$ ohne Wirkung bleibt, so wird die Substitution $\mathsf{T} \pmod{N}$, welche allen Congruenzen

$$\mathsf{T} \equiv \mathsf{T}_q \pmod{q^t}$$

[1] Jordan, *Traité des substitutions*, 120—124.

genügt, $\equiv 1 \pmod{N}$ ausfallen, und den Rest $f \pmod{N}$ nicht ändern. So geht die behauptete Relation hervor.

4. *Hilfssätze zur Bestimmung der Zahlen* $f(q^t)$.

Wir brauchen in Betreff der Grössen $f(q^t)$ nur den Fall zu betrachten, wo f primitiv in Bezug auf q ist, also die Coefficienten a_{ik} von f nicht sämmtlich den Theiler q haben. Denn sei etwa $f = q^d . g$ und $d > 0$. So lange man $d \geqq t > 0$ hat, bleibt der Rest $f \pmod{q^t}$ bei jeder Substitution ungeändert, und man erhält $f(q^t) = \psi_n(q^t)$. Wenn aber $d < t$ ist, so gilt die Relation

$$(1) \qquad f(q^t) = q^{(n^2-1)d} . g(q^{t-d}).$$

In der That, eine jede Substitution $\mathsf{T} \equiv 1 \pmod{q^t}$, welche auf $f \pmod{q^t}$ ohne Wirkung ist, ändert auch $g \pmod{q^{t-d}}$ nicht; und ebenso wird ein jedes $\mathfrak{T} \equiv 1 \pmod{q^{t-d}}$, welches auf $g \pmod{q^{t-d}}$ ohne Wirkung bleibt, auch $f \pmod{q^t}$ nicht ändern. Aus einem jeden $\mathfrak{T}$ lassen sich aber $q^{(n^2-1)d}$, nach dem Modul q^t verschiedene Substitutionen T herleiten. Denn in einem $\mathfrak{T}$ ist immer mindestens ein Coefficient c da, für welchen $\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial c}$ zu q relativ prim ausfällt. Wir können nun, um eine Substitution T zu gewinnen, erst jeden der $n^2 - 1$ übrigen Coefficientenreste $\pmod{q^{t-d}}$ von $\mathfrak{T}$ durch q^d verschiedene Reste $\pmod{q^t}$ ersetzen. Der Rest von c für den Modul q^t folgt hernach eindeutig aus der Bedingung, dass die veränderte Substitution eine Determinante $\equiv 1 \pmod{q^t}$ ergebe.

Insofern es uns um Factoren für die Formenanzahl eines Genus zu thun ist, reicht die Betrachtung solcher Moduln q^t aus, welche gewisse Grenzen $q^{G(q)}$ überschreiten. Denn ist $t \geqq t - d > 0$, so beweist man leicht, dass die Zahl $\psi_n(q^{t-d}) : f(q^{t-d})$ einen Divisor der Zahl $\mathfrak{N} = \frac{\psi_n(q^t)}{f(q^t)}$ vorstellt. Beachtet man die oben gegebenen Werthe von $\psi_n(q^t)$, so läuft dieses darauf hinaus, dass die Zahl $f(q^t)$ in der Zahl $q^{(n^2-1)d} . f(q^{t-d})$ $[t - d > 0]$ aufgeht.

Für eine mit q primitive Form f machen wir von folgenden Bezeich-

nungen Gebrauch. Die höchsten in den Invarianten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ enthaltenen Potenzen von q sollen die Exponenten besitzen: $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, und es sei allgemein

$$\upsilon_h = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_h, \qquad \partial_h = h\omega_1 + (h-1)\omega_2 + \ldots + \omega_h.$$

Ferner nehmen wir an, von den $n-1$ nicht negativen Zahlen ω_h seien im Ganzen $\lambda - 1$ grösser als Null, nämlich die folgenden:

$$(\vartheta_0 = 0) \qquad \omega_{\vartheta_1}, \; \omega_{\vartheta_2}, \; \ldots, \; \omega_{\vartheta_{\lambda-1}} \qquad (\vartheta_\lambda = n)$$

und wir bilden die Gleichungen

$$\vartheta_1 = \varkappa_1, \qquad \vartheta_2 = \varkappa_1 + \varkappa_2, \; \ldots, \; \vartheta_\lambda = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_\lambda,$$

d. i.

$$\varkappa_k = \vartheta_k - \vartheta_{k-1}.$$

Der Quotient aus der Determinante Δ von f und der Potenz $q^{\partial_{n-1}}$ mag für einen Moment Δ_0 heissen. Wir werden weiterhin voraussetzen, dass unsere Moduln q^t, wenn q einer ungeraden Primzahl p gleich ist, die Potenz $p^G = p^{\upsilon_{n-1}}$, und wenn $q = 2$ ist, die Potenz $2^G = 2^{1+\upsilon_{n-1}}$ überschreiten. Die Folge davon wird sein, dass ein jeder Rest $f \pmod{q^t}$ uns, wenn $q = p$ ist, den Werth der Einheit $\left(\frac{\Delta_0}{p}\right)$, und wenn $q = 2$ ist, den Werth der Einheit $(-1)^{\frac{\Delta_0 - 1}{2}}$, sowie im Falle $\sigma_{n-1} = 2$, auch den Werth der Einheit $\left(\frac{2}{\Delta_0}\right)$ liefert. Denn es gilt der Satz:

Genügt eine Form g schon der Congruenz

$$g \cong f \pmod{q^{G+1}},$$

und soll noch $g \cong f \pmod{q^t}$ sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass, wenn $q = p$, die Beziehung

$$\Delta(g) \equiv \Delta(f) \pmod{p^{t+\partial_{n-2}}}$$

und wenn $q = 2$, die Beziehung

$$\Delta(g) \equiv \Delta(f) \pmod{\sigma_{n-1} \cdot 2^{t+\partial_{n-2}}}$$

bestehe.

Ich erwähne noch einige, zum Theil bekannte Sätze über Congruenzen, welche bald ihre Anwendung finden werden.

(2). Ist eine Form f und eine Zahl α prim in Bezug auf eine ungerade Primzahl p, und hat die Congruenz

$$f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{p}$$

$A \, . \, p^{n-1}$ Lösungen, so besitzt die Congruenz

$$(t) \qquad f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{p^t} \qquad (t > 1)$$

$A \, . \, p^{(n-1)t}$ Lösungen.

Denn genügt ein System ξ_i der Congruenz

$$(t-1) \qquad f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{p^{t-1}},$$

und setzt man $x_i \equiv \xi_i + p^{t-1} u_i \pmod{p^t}$, so kommt, da $t > 1$ sein soll,

$$f(x_i) \equiv f(\xi_i) + p^{t-1} \, . \sum u_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \pmod{p^t}.$$

Nun können die Zahlen $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ nicht sämmtlich durch p theilbar sein, da man $\frac{1}{2} \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \equiv \alpha \pmod{p}$ hat. Also ergiebt die Congruenz

$$\frac{\alpha - f(\xi_i)}{p^{t-1}} \equiv \sum u_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \pmod{p}$$

p^{n-1} Lösungen $u_i \pmod{p}$, und eine jede Lösung von $(t-1)$ liefert p^{n-1} Lösungen von (t), woraus unmittelbar unser Satz folgt.

Jetzt sei $f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ eine in Bezug auf 2 primitive Form, und α eine ungerade Zahl. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem die Invariante σ_1 von f den Werth 1 oder 2 hat, die Zahlen a_{ii} also zum Theil ungerade oder sämmtlich gerade ausfallen.

(3). Ist $\sigma_1 = 1$, und besitzt die Congruenz

$$f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{8}$$

$A \, . \, 2^{3(n-1)}$ Lösungen, so liefert die Congruenz

$$(t) \qquad f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{2^t} \qquad (t > 3)$$

$A \, . \, 2^{(n-1)t}$ Lösungen.

In der That, es genügen der Congruenz

$$(t-1) \qquad f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{2^{t-1}}$$

zusammen mit einem Systeme $\xi_i \pmod{2^{t-1}}$ immer alle die 2^n Systeme $x_i \pmod{2^{t-1}}$, für welche $x_i \equiv \xi_i \pmod{2^{t-2}}$ ist. Denn jedes dieser Systeme lässt sich in die Form $x_i \equiv \xi_i + 2^{t-2}\delta_i \pmod{2^{t-1}}$ setzen, wo die n Grössen δ_i entweder 0 oder 1 bedeuten; man hat also wirklich:

$$f(x_i) \equiv f(\xi_i) + 2^{t-1}.\sum \delta_i \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \equiv \alpha \pmod{2^{t-1}}.$$

Bildet man nun mit Hilfe einer Lösung $\xi_i \pmod{2^{t-2}}$ von $(t-1)$ ein System $x_i \equiv \xi_i + 2^{t-2}u_i \pmod{2^{t-1}}$, so kommt

$$f(x_i) \equiv f(\xi_i) + 2^{t-1}.\sum u_i \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \pmod{2^t},$$

und die Congruenz

$$\frac{\alpha - f(\xi_i)}{2^{t-1}} \equiv \sum u_i \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \pmod 2$$

ergiebt 2^{n-1} Lösungen $u_i \pmod 2$. So führt eine jede Lösung $\xi_i \pmod{2^{t-2}}$ von $(t-1)$ zu 2^{n-1} Lösungen $\xi_i \pmod{2^{t-1}}$ von (t), woraus die Richtigkeit unserer Behauptung erhellt.

Es ist auch klar, dass unser Satz gültig bleibt, wenn wir alle solchen Lösungen ξ_i ausschliessen, die zugleich gewissen gegebenen linearen Congruenzen nach dem Modul 2 genügen.

(4). Ist zweitens $\sigma_1 = 2$, und hat die Congruenz

$$f(\xi_i) \equiv 2\alpha \pmod 4$$

$2A.2^{2(n-1)}$ Lösungen, in welchen die n Zahlen $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ nicht sämmtlich gerade sind, so liefert die Congruenz

$$(t) \qquad f(\xi_i) \equiv 2\alpha \pmod{2^t} \qquad (t>2)$$

$2A.2^{(n-1)t}$ Lösungen, bei welchen die n Zahlen $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ nicht sämmtlich gerade sind.

Denn setzt man $\frac{1}{2}f = \varphi$, so gruppiren sich je 2^n Lösungen $\xi_i \pmod{2^t}$

von (t) zu je einer Lösung $\xi_i \pmod{2^{t-1}}$ von $\varphi(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{2^{t-1}}$. Unser Satz geht so in einen analogen Satz in Betreff des Ausdruckes φ über, welcher dann ähnlich bewiesen wird wie der Satz (2).

Wir schreiten nun zur Bestimmung der Grössen $f(q^t)$.[1] Dabei werden wir uns hauptsächlich auf diejenigen Resultate stützen, welche in der Note zu meiner am Anfange citirten Arbeit enthalten sind (*F. Q.*, pp. 169—178).

5. *Der Fall einer ungeraden Primzahl.*

Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall, wo q gleich einer ungeraden Primzahl p ist. Die Form f sei primitiv in Bezug auf p. Der Modul p^t möge die Potenz $p^{\tau_{n-1}}$ überschreiten.

Da wir f durch jeden nach dem Modul p^t congruenten Rest ersetzen dürfen, so können wir annehmen (*F. Q.*, p. 7), f habe den Typus

$$f \equiv \alpha\xi^2 + F \pmod{p^t},$$

wo α zu p prim ist, und F einen Rest von $n-1$ Variabeln vorstellt. Die Coefficienten von F müssen den Factor p^{ω_1} enthalten, und setzen wir

$$F \equiv p^{\omega_1} f^{(1)} \pmod{p^t},$$

so fällt der Rest $f^{(1)}$ primitiv in Bezug auf p aus, und die $n-2$ Invarianten $p^{\omega_k^{(1)}}$, welche diesem Reste angehören, erfüllen die Gleichungen:

$$\omega_{h-1}^{(1)} = \omega_h. \qquad (h=2,3,\ldots,n-1)$$

Wir denken uns die $f(p^t)$ verschiedenen Substitutionen T von einer Determinante $\equiv 1 \pmod{p^t}$ aufgestellt, welche den Rest $f \pmod{p^t}$ in sich selbst überführen. In jeder dieser Substitutionen muss die erste Verticalreihe aus n Zahlen $\xi_i \pmod{p^t}$ bestehen, welche

$$f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{p^t}$$

ergeben. Der vorstehenden Congruenz mögen $A \cdot p^{(n-1)t}$ verschiedene Systeme $\xi_i \pmod{p^t}$ Genüge leisten. Die Betrachtungen aus *F. Q.*, p. 170,

[1] In einem ausgezeichneten Falle, nämlich für die Form $f = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, sind die Zahlen $f(q)$ von Herrn Jordan gegeben (*Traité des substitutions*, 201—214, Ordre du groupe orthogonal).

lassen erkennen, dass jedem dieser Systeme ξ_i wirklich Substitutionen T zukommen, welche den Rest f in sich selbst transformiren.

Es frägt sich, wie viele verschiedene T können aus einem bestimmten Systeme ξ_i hervorgehen. Ist T_0 eine erste dieser Substitutionen, so wird jedes überhaupt vorhandene T mit der ersten Verticalreihe ξ_i in ganz bestimmter Weise zusammengesetzt sein als Product aus T_0 und aus zwei Substitutionen U und $\mathfrak{T}$ von der Form

$$U \equiv \begin{vmatrix} 1, & U_1, & \ldots, & U_{n-1} \\ 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{T} \equiv \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & t_1^1, & \ldots, & t_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & t_{n-1}^1, & \ldots, & t_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \pmod{p^t}.$$

Soll nun T den Rest f in sich selbst überführen, so ist nöthig, dass auch $U.\mathfrak{T}$ diesen Rest in sich selbst transformire. Hierzu wieder ist erforderlich, dass die Relationen $U_h \equiv 0 \pmod{p^t}$ gelten, und dass die Substitution $\mathfrak{T}$ auf den Rest $F \pmod{p^t}$ ohne Wirkung bleibe. Die Anzahl der verschiedenen T mit der ersten Verticalreihe ξ_i, welche $f \pmod{p^t}$ nicht ändern, wird daher gleich der Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{T}$ sein, welche auf $F \pmod{p^t}$ ohne Wirkung sind, also gleich $F(p^t)$. Zieht man noch die Formel 4. (1) in Betracht, so kommt schliesslich

$$f(p^t) = p^{(n-1)t+\omega_1[(n-1)^2-1]} . A . f^{(1)}(p^{t-\omega_1}).$$

Wir setzen nun allgemein:

$$f(p^t) = p^{\frac{n(n-1)}{2}t + \sum\limits_h^{1,n-1} \omega_h\left(\frac{(n-h)(n-h+1)}{2}-1\right)} . f\{p\}. \qquad \left(t > \sum_h^{1,n-1} \omega_h\right)$$

Für den Rest $f^{(1)}$ bilden wir eine entsprechende Grösse $f^{(1)}\{p\}$. *Die vorstehende Relation verwandelt sich alsdann in:*

$$(p) \qquad f\{p\} = A . f^{(1)}\{p\},$$

und diese Formel bleibt auch für $n = 1$ gültig, falls nur für eine Form F von Null Variabeln $F\{p\} = \frac{1}{2}$ genommen wird.

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung der Grösse A. Nach dem Satze 4. (2) muss $A . p^{n-1}$ die Anzahl aller Lösungen von $f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{p}$ ausdrücken. Bedeutet $\varkappa$ den Index der ersten von den Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n (= -\infty)$, welche nicht verschwindet, so können wir f von dem Typus voraussetzen:

$$\left.\begin{array}{r} f \equiv \Phi + p^{\omega_\varkappa} . f^{(\varkappa)} \\ \Phi \equiv \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \ldots + \alpha_\varkappa \xi_\varkappa^2 \end{array}\right| \pmod{p^l}, \qquad (\alpha_1 = \alpha)$$

wo ein jedes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varkappa$ und ebenso der Rest $f^{(\varkappa)}$ primitiv in Bezug auf p ist (*F. Q.*, p. 19). Wir erhalten dann $f \equiv \Phi \pmod{p}$, und $A . p^{\varkappa-1}$ muss die Anzahl der Lösungen von $\Phi \equiv \alpha \pmod{p}$ geben. Nun lässt sich diese letztere Anzahl nach bekannten Sätzen herleiten. [1] Man gelangt so zu folgenden Beziehungen:

1) wenn $\varkappa \equiv 0 \pmod{2}$,

$$A = (1 - \theta . p^{-\frac{\varkappa}{2}}), \qquad \theta = \left(\frac{(-1)^{\frac{\varkappa}{2}} . \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\varkappa}{p}\right);$$

2) wenn $\varkappa \equiv 1 \pmod{2}$,

$$A = (1 + \theta^1 . p^{-\frac{\varkappa-1}{2}}), \qquad \theta^1 = \left(\frac{(-1)^{\frac{\varkappa-1}{2}} . \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\varkappa}{p}\right).$$

Im Falle $\varkappa = 1$ hat man sich $\theta^1 = 1$ zu denken.

Wir können weiter die Grösse $f\{p\}$ auf $f^{(\varkappa)}\{p\}$ zurückführen. Man findet:

$$f\{p\} = \mathfrak{A} . f^{(\varkappa)}\{p\},$$

wenn $\mathfrak{A}$ den folgenden Ausdruck bedeutet: im Falle $\varkappa \equiv 0 \pmod{2}$,

$$\mathfrak{A} = 2\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^4}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p^{\varkappa-2}}\right) . \left(1 - \frac{\theta}{p^{\frac{\varkappa}{2}}}\right);$$

und im Falle $\varkappa \equiv 1 \pmod{2}$,

$$\mathfrak{A} = 2\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^4}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p^{\varkappa-1}}\right).$$

---

[1] LEBESGUE, *Recherches sur les nombres*, § 5 (Journal de LIOUVILLE, T. 2, pp. 266—275). — C. JORDAN, Comptes rendus, 1866, I, pp. 687—690; *Traité des substitutions*, 197—200; Journal de LIOUVILLE, 2$^{\text{me}}$ série, T. 17, p. 372. — *F. Q.*, artt. VII—VIII.

Für ein $\varkappa = 1$ stimmt diese Gleichung unmittelbar mit (p) überein, während sie für ein $\varkappa > 1$ leicht aus (p) mit Hilfe eines Schlusses von $\varkappa - 1$ auf $\varkappa$ hervorgeht. Man braucht nur zu beachten, dass dem Reste $f^{(1)}$ in derselben Weise die Zahl $\varkappa - 1$ angehört wie dem Reste f die Zahl $\varkappa$.

Für alle ungeraden Primzahlen p, welche nicht in der Determinante Δ der Form f aufgehen, wird $\varkappa = n$, also $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\varkappa \equiv \Delta \pmod{p}$, während $f^{(\varkappa)}$ sich als ein Rest von Null Variabeln erweist. Für alle diese Primzahlen p kommt daher:

1) wenn $n \equiv 0 \pmod{2}$,

$$f(p^t) = p^{\frac{n(n-1)}{2}t} \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^{n-2}}\right) \cdot \left\{1 - \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\Delta}{p}\right)\frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}\right\};$$

2) wenn $n \equiv 1 \pmod{2}$,

$$f(p^t) = p^{\frac{n(n-1)}{2}t} \cdot \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^{n-1}}\right).$$

Um die Grössen $f\{p\}$ vollständig darzustellen, wollen wir endlich f als *Hauptrest* für den Modul p^t voraussetzen. Falls die Bezeichnungen aus 4. gelten, so heisst dieses, f soll den Typus haben:

$$f \equiv \{\Phi_1 + p^{\omega\vartheta_1}[\Phi_2 + p^{\omega\vartheta_2}[\Phi_3 + \ldots + p^{\omega\vartheta_{\lambda-1}}(\Phi_\lambda)]]\} \pmod{p^t},$$

$$\Phi_k \equiv \alpha_1^{(k)} \xi_1^{(k)} \xi_1^{(k)} + \ldots + \alpha_{\varkappa_k}^{(k)} \xi_{\varkappa_k}^{(k)} \xi_{\varkappa_k}^{(k)} \pmod{p^{t-v\vartheta_{k-1}}},$$

wo die $\alpha_h^{(k)}$ sämmtlich zu p prim sind (*F. Q.*, p. 19).

Für einen Hauptrest f wird die Grösse $f\{p\}$ gleich einem Producte aus der Potenz $2^{\lambda-1}$ und aus λ Factoren $\mathfrak{A}_k$, welche den λ einzelnen Resten Φ_k entsprechen und folgende Bedeutung haben:

$$\mathfrak{A}_k = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^{2\left[\frac{\varkappa_k}{2}\right]}}\right) \cdot \mathfrak{a}_k,$$

wo $\left[\frac{\varkappa_k}{2}\right]$ die grösste in $\frac{\varkappa_k}{2}$ enthaltene ganze Zahl vorstellt, und $\mathfrak{a}_k = 1$ ist im Falle $\varkappa_k \equiv 1 \pmod{2}$, dagegen:

$$\mathfrak{a}_k = \left(1 + \theta_k . p^{-\frac{\varkappa_k}{2}}\right)^{-1}, \qquad \theta_k = \left(\frac{(-1)^{\frac{\varkappa_k}{2}} . \Delta(\Phi_k)}{p}\right),$$

wenn $\varkappa_k \equiv 0 \pmod 2$ *ist.*

Die Richtigkeit dieser Formeln ergiebt sich sofort mit Hilfe eines Schlusses von $\lambda - 1$ auf λ. Man bemerkt nämlich, dass dem Reste $f^{(\varkappa)}(\varkappa = \varkappa_1)$ in derselben Weise die Zahl $\lambda - 1$ zukommt wie dem Reste f die Zahl λ.

6. *Der Fall der Primzahl 2.*

Wir behandeln jetzt den Fall $q = 2$, welcher auf etwas umständlicherem Wege zu gleich einfachen Resultaten führt. Die Form f sei primitiv in Bezug auf 2. Wir machen für dieselbe von den in 4. angegebenen Bezeichnungen Gebrauch. Der Modul 2^t sei grösser als die Potenz $2^{1+v_{n-1}}$; man hat dann immer $t \geqq 2$, und wenn $v_{n-1} > 0$, auch $t \geqq 3$.

Wir werden die Grössen $f(2^t)$ finden, indem wir f als *Hauptrest* für den Modul 2^t annehmen, also für f den Typus zulassen:

$$f \equiv \{\Phi_1 + 2^{\omega_{\vartheta_1}}[\Phi_2 + \ldots + 2^{\omega_{\vartheta_{\lambda-1}}}(\Phi_\lambda)]\} \pmod{2^t},$$

wo die einzelnen Φ_k Reste vorstellen, die in Bezug auf 2 primitiv sind, und entweder dem Typus

$$(\mathrm{R_I}) \qquad \Phi_k \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1^{(k)}, & & & \\ & \alpha_2^{(k)}, & & \\ & & \cdots & \\ & & & \alpha_{\varkappa_k}^{(k)} \end{vmatrix} \pmod{2^{t-v_{\vartheta_{k-1}}}}$$

oder, wenn $\varkappa_k$ gerade ist, auch dem Typus

$$(\mathrm{R_{II}}) \qquad \Phi_k \equiv \begin{vmatrix} 2\alpha_1^{(k)}, & A_1^{(k)}, & & & & \\ A_1^{(k)}, & 2\tilde{\alpha}_1^{(k)}, & & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & 2\alpha_{\frac{\varkappa_k}{2}}^{(k)}, & A_{\frac{\varkappa_k}{2}}^{(k)} \\ & & & & A_{\frac{\varkappa_k}{2}}^{(k)}, & 2\tilde{\alpha}_{\frac{\varkappa_k}{2}}^{(k)} \end{vmatrix} \pmod{2^{t-v_{\vartheta_{k-1}}}}$$

angehören (*F. Q.*, p. 23). Dabei bedeuten die $\alpha_h^{(k)}$, ebenso wie die $A_h^{(k)}$, lauter ungerade Grössen.

Wir geben jedem Reste Φ_k vom Typus (R_I) eine Zahl $\tau_k = 1$, und jedem Reste Φ_k vom Typus (R_{II}) eine Zahl $\tau_k = 2$. Die $\varkappa_k - 1$ Invarianten σ eines Restes Φ_k nennen wir $\rho_1^{(k)}, \rho_2^{(k)}, \ldots, \rho_{\varkappa_k-1}^{(k)}$. Es gelten dann folgende Beziehungen (*F. Q.*, art. IV), wenn $\tau_k = 1$:

$$\rho_h^{(k)} = 1;$$

wenn $\tau_k = 2$:

$$\rho_{2h_0-1}^{(k)} = 2, \qquad \rho_{2h_0}^{(k)} = 1;$$

ferner:

$$\sigma_{(\vartheta_{k-1}+h)} = \rho_h^{(k)}, \qquad (h=1, 2, \ldots, \varkappa_k - 1)$$

und:

$$\sigma_{\vartheta_k} = 1,$$

sodass die Zahlen τ_k durch die Invarianten σ_h bestimmt sind. In der That erhält man insbesondere:

$$\tau_k = \sigma_{(\vartheta_{k-1}+1)} = \sigma_{(\vartheta_k-1)}.$$

Ein Ausdruck von der Gestalt $\frac{1}{\tau}\Phi$ mag, je nachdem $\tau = 1$ oder $= 2$ ist, kurz mit (I) oder mit (II) bezeichnet werden. Wir schicken zunächst einige Bemerkungen über die Congruenzen

$$(\mathrm{I}) \equiv m \pmod 4 \quad \text{und} \quad (\mathrm{II}) \equiv m \pmod 2$$

voraus.

(I). Für einen Ausdruck

$$\Psi \equiv \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + \ldots + \alpha_\varkappa\xi_\varkappa^2 \pmod 4$$

mögen $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ die Anzahlen der Lösungen von

$$\Psi \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$$

vorstellen. Diese 4 Anzahlen können leicht nach *F. Q*, art. VIII, gefunden werden. Man setze nämlich

$$\begin{aligned}
4\Psi_0 &= \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \\
4\Psi_1 &= \psi_0 - i\psi_1 - \psi_2 + i\psi_3, \\
4\Psi_2 &= \psi_0 - \psi_1 + \psi_2 - \psi_3, \\
4\Psi_3 &= \psi_0 + i\psi_1 - \psi_2 - i\psi_3,
\end{aligned}$$

wo $i = \sqrt{-1}$, und bilde die Einheiten:

$$
\text{(I)}\quad
\begin{aligned}
\varepsilon &= (-1)^{\left[\frac{\varkappa}{2}\right]}.(-1)^{\sum\limits_k^{1,\varkappa}\frac{a_k-1}{2}},\\
\delta &= (-1)^{\left[\frac{\varkappa}{4}\right]}.(-1)^{\left[\frac{\varkappa}{2}\right]\left(\left[\frac{\varkappa}{2}\right]+\sum\limits_k^{1,\varkappa}\frac{a_k-1}{2}\right)}.(-1)^{\sum\limits_{k'<k''}^{1,\varkappa}\frac{a_{k'}-1}{2}\cdot\frac{a_{k''}-1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Alsdann geben die Formeln *F. Q.*, p. 62 und p. 64:

$$\psi_0 = 2^{2\varkappa}, \qquad \psi_2 = 0$$

und

$$\psi_h = \left(\frac{1+\varepsilon}{2} - \frac{1-\varepsilon}{2}i\right)\varepsilon^{\frac{h-1}{2}}.\delta.(-i)^{\varkappa^2\left(\frac{h-1}{2}\right)^2}.\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{\varkappa-2\left[\frac{\varkappa}{2}\right]}.2^{\frac{3\varkappa}{2}}. \qquad (h=1,3)$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

1) $\varkappa \equiv 0 \pmod 2$.

(A) $\varepsilon = 1$; $\quad \psi_1 = \delta.2^{\frac{3\varkappa}{2}}, \quad \psi_3 = \delta.2^{\frac{3\varkappa}{2}}.$

$$4\Psi_0 = 2^{2\varkappa} + \delta.2^{\frac{3\varkappa}{2}+1},$$

$$4\Psi_2 = 2^{2\varkappa} - \delta.2^{\frac{3\varkappa}{2}+1},$$

$$4\Psi_1 = 4\Psi_3 = 2^{2\varkappa}.$$

(B) $\varepsilon = -1$; $\quad \psi_1 = -i\delta.2^{\frac{3\varkappa}{2}}, \quad \psi_3 = i\delta.2^{\frac{3\varkappa}{2}}.$

$$4\Psi_0 = 4\Psi_2 = 2^{2\varkappa},$$

$$4\Psi_1 = 2^{2\varkappa} - \delta.2^{\frac{3\varkappa}{2}+1},$$

$$4\Psi_3 = 2^{2\varkappa} + \delta.2^{\frac{3\varkappa}{2}+1}.$$

2) $\varkappa \equiv 1 \pmod 2$.

$$\text{(A)}\quad \varepsilon = 1; \qquad \psi_1 = \delta . \frac{1+i}{\sqrt{2}} . 2^{\frac{3\varkappa}{2}}, \qquad \psi_3 = \delta . \frac{1-i}{\sqrt{2}} . 2^{\frac{3\varkappa}{2}}.$$

$$4\Psi_0 = 4\Psi_1 = 2^{2\varkappa} + \delta . 2^{\frac{3\varkappa+1}{2}},$$

$$4\Psi_2 = 4\Psi_3 = 2^{2\varkappa} - \delta . 2^{\frac{3\varkappa+1}{2}}.$$

$$\text{(B)}\quad \varepsilon = -1; \qquad \psi_1 = \delta . \frac{1-i}{\sqrt{2}} . 2^{\frac{3\varkappa}{2}}, \qquad \psi_3 = \delta . \frac{1+i}{\sqrt{2}} . 2^{\frac{3\varkappa}{2}}.$$

$$4\Psi_0 = 4\Psi_3 = 2^{2\varkappa} + \delta . 2^{\frac{3\varkappa+1}{2}},$$

$$4\Psi_2 = 4\Psi_1 = 2^{2\varkappa} - \delta . 2^{\frac{3\varkappa+1}{2}}.$$

In Betreff der Einheiten ε und δ erwähnen wir noch einige Punkte.

1) Der Rest $l \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\varkappa \pmod 4$ ist durch die Einheit ε bestimmt.

Da nämlich immer $\alpha_k \equiv 1 \pmod 2$ ist, so kommt zunächst

$$l \equiv \varkappa \pmod 2, \qquad (-1)^l = (-1)^\varkappa.$$

Sind ferner von den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varkappa$ im Ganzen $\varkappa_0 \equiv -1 \pmod 4$ und $\varkappa - \varkappa_0 \equiv 1 \pmod 4$, so folgt einerseits:

$$\varepsilon = (-1)^{\left[\frac{\varkappa}{2}\right] - \varkappa_0},$$

andererseits:

$$l \equiv (\varkappa - \varkappa_0) - \varkappa_0 \equiv \varkappa - 2\varkappa_0 \pmod 4,$$

mithin:

$$(-1)^{\left[\frac{l}{2}\right]} = (-1)^{\left[\frac{\varkappa}{2}\right] - \varkappa_0} = \varepsilon.$$

Im Speciellen findet man, wenn $\varkappa \equiv 1 \pmod 2$:

$$l \equiv \varepsilon \pmod 4.$$

2) Ersetzt man Ψ durch $-\Psi$, also $\alpha_k \pmod 4$ durch $-\alpha_k \pmod 4$,

so mögen an die Stelle von ε und δ die Einheiten ε^- und δ^- treten. Man erhält unmittelbar:

$$\varepsilon^- = \varepsilon . (-1)^\varkappa, \qquad \delta^- = \delta . \varepsilon^{\varkappa-1},$$

also:

$$1)\ \varkappa \equiv 0 \pmod 2, \qquad \varepsilon^- = \varepsilon, \qquad \delta^- = \delta . \varepsilon;$$

$$2)\ \varkappa \equiv 1 \pmod 2, \qquad \varepsilon^- = -\varepsilon, \qquad \delta^- = \delta.$$

Dasselbe Resultat erschliesst man auch leicht aus der aufgestellten Tabelle, indem man die Beziehungen $\Psi_{-h} = (-\Psi)_h$ beachtet.

3) Wir wollen

$$\Psi^1 \equiv \alpha_2 \xi_2^2 + \ldots + \alpha_\varkappa \xi_\varkappa^2 \pmod 4$$

setzen, und die Einheiten ε und δ, welche zu Ψ^1 gehören, mit ε^1 und δ^1 bezeichnen.

Mit Hilfe der Relationen

$$\left[\frac{\varkappa}{2}\right] - \left[\frac{\varkappa-1}{2}\right] \equiv \varkappa - 1, \qquad \left[\frac{\varkappa}{4}\right] - \left[\frac{\varkappa-1}{4}\right] \equiv (\varkappa-1)\left[\frac{\varkappa-1}{2}\right] \pmod 2$$

findet man:

$$\varepsilon = (-1)^{\varkappa-1} . (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} . \varepsilon^1, \qquad \delta = (-1)^{\varkappa . \frac{\alpha-1}{2}} . \varepsilon^{(\varkappa-1)+\frac{\alpha-1}{2}} . \delta^1, \qquad (\alpha=\alpha_1)$$

also:

$$1)\ \varkappa \equiv 0 \pmod 2; \quad (A)\ \varepsilon = 1; \quad \delta = \delta^1, \qquad \alpha \equiv -\varepsilon^1 \pmod 4;$$

$$(B)\ \varepsilon = -1; \quad \delta = -(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} . \delta^1, \quad \alpha \equiv \varepsilon^1 \pmod 4.$$

$$2)\ \varkappa \equiv 1 \pmod 2; \quad (A)\ \alpha \equiv -\varepsilon \pmod 4; \quad \varepsilon^1 = -1, \quad \delta = -\varepsilon . \delta^1;$$

$$(B)\ \alpha \equiv \varepsilon \pmod 4; \qquad \varepsilon^1 = 1, \qquad \delta = \delta^1.$$

(II). Jetzt liege ein Ausdruck vor:

$$X \equiv (\alpha_1 \xi_1^2 + A_1 \xi_1 \breve{\xi}_1 + \breve{\alpha}_1 \breve{\xi}_1^2) + \ldots + \left(\alpha_{\frac{\varkappa}{2}} \xi_{\frac{\varkappa}{2}}^2 + A_{\frac{\varkappa}{2}} \xi_{\frac{\varkappa}{2}} \breve{\xi}_{\frac{\varkappa}{2}} + \breve{\alpha}_{\frac{\varkappa}{2}} \breve{\xi}_{\frac{\varkappa}{2}}^2\right) \pmod 2,$$

und es bedeute X_0 und X_1 die Anzahl der Lösungen von

$$X \equiv 0 \quad \text{und} \quad X \equiv 1 \pmod 2.$$

Setzt man:

$$2X_0 = \chi_0 + \chi_1, \qquad 2X_1 = \chi_0 - \chi_1,$$

ferner:

$$\text{(II)} \qquad \theta = \left(\frac{2}{4a_1\tilde{a}_1 - A_1^2}\right) \cdots \left(\frac{2}{4a_{\frac{\varkappa}{2}}\tilde{a}_{\frac{\varkappa}{2}} - A_{\frac{\varkappa}{2}}^2}\right),$$

so kommt nach *F. Q.*, p. 65:

$$\chi_0 = 2^\varkappa, \qquad \chi_1 = \theta \,.\, 2^{\frac{\varkappa}{2}},$$

also:

$$2X_0 = 2^\varkappa + \theta \,.\, 2^{\frac{\varkappa}{2}}, \qquad 2X_1 = 2^\varkappa - \theta \,.\, 2^{\frac{\varkappa}{2}}.$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir versuchen, eine Formel aufzustellen, mit deren Hilfe die Grössen $f(2^t)$ für Reste von $n(>1)$ Variabeln auf entsprechende Grössen für Reste von weniger als n Variabeln zurückgeführt werden können. Für Reste f von einer Variabeln hat man einfach $f(2^t) = 1$.

Da wir f als Hauptrest für den Modul 2^t voraussetzen, so gilt jedenfalls eine Congruenz

$$f \equiv \Phi_1 + 2^{\omega_{\varkappa_1}} f^{(\varkappa_1)} \pmod{2^t}, \qquad (\omega_{\varkappa_1} \geqq 1)$$

wo Φ_1 einen Rest vom Typus $(\mathrm{R_I})$ oder $(\mathrm{R_{II}})$ bedeutet. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem die Invariante $\tau_1 = \sigma_1$ den Werth 1 oder 2 erhält.

$\underline{(\sigma_1 = 1).}$

Ist zunächst $\sigma_1 = 1$, so lässt f sich zugleich in der Form schreiben:

$$f \equiv \alpha\xi^2 + 2^{\omega_1} f^{(1)} \pmod{2^t},$$

wo α ungerade ist, und $f^{(1)}$ einen in Bezug auf 2 primitiven Rest vorstellt,

welcher im Falle $\omega_1 = 0$ ($\varkappa_1 > 1$) eine erste Invariante σ gleich 1 ergiebt. Ueberhaupt folgen die Invarianten $\sigma_h^{(1)}$ und $2^{\omega_h^{(1)}}$ von $f^{(1)}$ aus den Gleichungen:

$$\sigma_{h-1}^{(1)} = \sigma_h, \qquad \omega_{h-1}^{(1)} = \omega_h. \qquad (h=2, 3, \ldots, n-1)$$

Die Anzahl $f(2^t)$ der incongruenten Substitutionen T von einer Determinante $\equiv 1 \pmod{2^t}$, welche den Rest f in sich selbst überführen, drückt sich in ähnlicher Weise aus wie oben die Zahl $f(p^t)$. In der That, die erste Verticalreihe einer Substitution T muss immer von n Zahlen $\xi_i \pmod{2^t}$ gebildet sein, welche

$$(t) \qquad f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{2^t}$$

liefern. Dazu tritt in den Fällen, wo $\varkappa_1 > 1$ ist, noch die Bedingung, dass nicht zu gleicher Zeit die sämmtlichen Congruenzen

$$(c) \qquad \xi_1 \equiv 1,\ \xi_2 \equiv 1,\ \ldots,\ \xi_{\varkappa_1} \equiv 1 \pmod 2$$

bestehen dürfen (*F. Q.*, p. 172 und 128). Wir bezeichnen mit $A.2^{(n-1)t}$, je nachdem $\varkappa_1 = 1$ oder > 1 ist, entweder die Anzahl aller möglichen Lösungen ξ_i von (t), oder nur die Anzahl aller derjenigen Lösungen ξ_i, welche nicht zugleich die Congruenzen (c) erfüllen.

Die Betrachtungen in *F. Q.*, p. 172, zeigen, dass wirklich jedem dieser Systeme ξ_i Substitutionen T entsprechen, welche den Rest f in sich selbst transformiren. Ebenso wie in 5. schliesst man dann, dass jedes solche System ξ_i zu genau soviel verschiedenen T Veranlassung giebt, als verschiedene Substitutionen von einer Determinante $\equiv 1 \pmod{2^t}$ existiren, welche auf den Rest $2^{\omega_1} f^{(1)}$ ohne Wirkung sind. So gewinnt man die Beziehung:

$$f(2^t) = 2^{(n-1)t+\omega_1[(n-1)^2-1]}.A.f^{(1)}(2^{t-\omega_1}).$$

In Betreff der Grösse A unterscheiden wir die Fälle $\varkappa_1 = 1$ und $\varkappa_1 > 1$.

1°. Ist zunächst $\varkappa_1 = 1$, so giebt unsere Annahme über t, (wenn $n > 1$), jedenfalls $t \geq 3$. Nach dem Satze 4. (3) muss daher $A.2^{3(n-1)}$ die Anzahl der Lösungen von $f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod 8$ ausdrücken.

Indem man in f alle Glieder fortlässt, welche durch 8 theilbar sind, erlangt f entweder den Typus:

$$(1) \qquad f \equiv \alpha\xi^2 \pmod 8.$$

In diesem Falle hat man $f \equiv \alpha \pmod 8$, sobald $\xi \equiv 1 \pmod 2$ ist. Die Anzahl der Lösungen von $f \equiv \alpha \pmod 8$ beträgt demnach $4 \cdot 2^{3(n-1)}$ und man findet:

$$A = 4.$$

Oder f gehört einem der beiden Typen an:

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned} f &\equiv \alpha\xi^2 + 4(I) \\ f &\equiv \alpha\xi^2 + 4(II) + 4(I) \end{aligned}\right\} \pmod 8.$$

In dem Ausdrucke $4(I)$ erscheint mindestens ein Glied $4\alpha\mathfrak{x}^2 \equiv 4\mathfrak{x} \pmod 8$. Durch Änderung des Restes von $\mathfrak{x} \pmod 2$ können wir aus jeder Lösung von $f \equiv \alpha \pmod 8$ eine solche von $f \equiv \alpha + 4 \pmod 8$ herleiten, und umgekehrt. Diese zwei Congruenzen besitzen also gleich viel, nämlich $2 \cdot 2^{3(n-1)}$ Lösungen, und man erhält:

$$A = 2.$$

Oder f gehört dem Typus an:

$$(3) \qquad f \equiv \alpha\xi^2 + 4(II) \pmod 8.$$

In diesem Falle hat $f \equiv \alpha \pmod 8$ stets $\xi \equiv 1 \pmod 2$ und $(II) \equiv 0 \pmod 2$ zur Folge. Bildet man für den Rest (II), von $\varkappa_2 = \varkappa$ Variabeln, nach der Formel (II), eine Einheit θ, so ergiebt sich die Anzahl der Lösungen von $(II) \equiv 0 \pmod 2$ gleich $2^{\varkappa-1}(1 + \theta \cdot 2^{\frac{-\varkappa}{2}})$, und man bekommt

$$A = 2\left(1 + \frac{\theta}{2^{\frac{\varkappa}{2}}}\right).$$

Oder f gehört dem Typus an:

$$(4) \qquad f \equiv \alpha\xi^2 + 2(I) \pmod 8.$$

Dann ist $f \equiv \alpha \pmod 8$ identisch mit $\xi \equiv 1 \pmod 2$ und $(I) \equiv 0 \pmod 4$. Gehören zu dem Reste (I) von $\varkappa_2 = \varkappa$ Variabeln, gemäss der Formel (I), zwei Einheiten ε und δ, so liefert die obige Tabelle:

1) $\varkappa \equiv 0 \pmod 2$,

$$\varepsilon = 1, \qquad A = \left(1 + \frac{\delta}{2^{\frac{\varkappa}{2}-1}}\right);$$

$$\varepsilon = -1, \qquad A = 1.$$

2) $\varkappa \equiv 1 \pmod 2$,

$$A = \left(1 + \frac{\delta}{2^{\frac{\varkappa-1}{2}}}\right).$$

Oder f gehört endlich dem Typus an:

$$f \equiv \alpha\xi^2 + 2(I) + 4(I)_1 \pmod 8. \tag{5}$$

In diesem Falle enthält $2(I)$ mindestens ein Glied $2\mathfrak{a}\mathfrak{x}^2 \equiv 2\mathfrak{x} \pmod 4$, mit dessen Hilfe die Lösungen von $f \equiv 1$ und $f \equiv 3 \pmod 4$ einander eindeutig zugeordnet werden können; und ebenso erscheint in $4(I)_1$ mindestens ein Glied $4\mathfrak{a}\mathfrak{x}^2 \equiv 4\mathfrak{x} \pmod 8$, in Folge dessen die Congruenzen $f \equiv \alpha$ und $f \equiv \alpha + 4 \pmod 8$ gleichviel Lösungen zulassen. So findet man leicht:

$$A = 1.$$

2°. Jetzt sei $\varkappa_1 > 1$. Wir theilen für einen Moment die Systeme ξ_i, welche $f(\xi_i) \equiv 1 \pmod 2$ ergeben, in Systeme erster oder zweiter Art ein, je nachdem sie den Bedingungen (c) entgegen sind oder mit denselben harmoniren. Irgend ein System $\xi_i \pmod 4$ erster Art möge die Congruenz

$$f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod 4 \tag{α}$$

erfüllen. Da ein solches System zugleich einen bestimmten Werth des Restes $f(\xi_i) \pmod 8$ ergiebt, so wird es nur einer der beiden Congruenzen $f(\xi_i) \equiv \alpha \pmod 8$ und $f(\xi_i) \equiv \alpha + 4 \pmod 8$ Genüge leisten. Ist nun von den Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\varkappa_1}$ etwa ξ_k die erste, welche nicht ungerade ausfällt, und ändern wir den Rest $\xi_k \pmod 4$ in $\xi_k + 2 \pmod 4$, so geht aus dem Systeme $\xi_i \pmod 4$ ein anderes System erster Art hervor, welches offenbar der anderen von diesen beiden Congruenzen genügen muss. So erhellt, dass diese zwei Congruenzen gleichviel Lösungen erster Art zulassen.

Beachtet man jetzt die Definition der Grösse A und den Satz 4. (3), so folgt, dass in allen Fällen die Anzahl der Lösungen erster Art von (α) durch $A \,.\, 2^{2(n-1)}$ ausgedrückt ist. Man gelangt zu dieser Anzahl, indem man die Anzahl aller möglichen Lösungen dieser Congruenz um die Anzahl ihrer Lösungen zweiter Art vermindert.

Wir unterscheiden die Fälle $\varkappa_1 \equiv 0 \pmod 2$ und $\varkappa_1 \equiv 1 \pmod 2$, schreiben aber der Einfachheit halber $\varkappa$ für $\varkappa_1$.

1. Zunächst sei $\varkappa \equiv 0 \pmod 2$. In diesem Falle treten überhaupt keine Lösungen zweiter Art auf, da die Congruenzen (c) stets $f(\xi_i) \equiv \varkappa \pmod 2$ nach sich ziehen.

Entweder ist nun f von dem Typus:

$$(1) \qquad f \equiv (I) \pmod 4.$$

Lassen wir dieselben Bezeichnungen wie oben für Ψ gelten, so liefert die aufgestellte Tabelle:

$$\varepsilon = 1, \qquad A = 1; \qquad [\delta = \delta^1;\ (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} = -\varepsilon^1]$$

$$\varepsilon = -1, \qquad A = \left(1 + \frac{\delta^1}{2^{\frac{\varkappa}{2}-1}}\right). \qquad [\delta = -(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \,.\, \delta^1,\ (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} = \varepsilon^1]$$

Oder f ist von dem Typus:

$$(2) \qquad f \equiv (I) + 2(I)_1 \pmod 4.$$

Alsdann erscheint in $2(I)_1$ ein Glied $2\mathfrak{a}\mathfrak{x}^2 \equiv 2\mathfrak{x} \pmod 4$, welches bewirkt, dass $f \equiv 1$ und $f \equiv 3 \pmod 4$ gleichviel Lösungen zulassen. Demnach kommt einfach:

$$A = 1.$$

2. Endlich sei $\varkappa \equiv 1 \pmod 2$. Wir unterscheiden dieselben zwei Fälle. Entweder ist f von dem Typus:

$$(1) \qquad f \equiv (I) \pmod 4.$$

Identificiren wir den Rest (I) mit dem obigen Ausdrucke Ψ, so entsteht für Systeme ξ_i zweiter Art:

$$f(\xi_i) \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\varkappa \equiv \varepsilon \pmod 4.$$

Diese Systeme gehen also nur den Fall an, wo $\alpha \equiv \varepsilon \pmod 4$ ist. Mithin kommt:

$$\alpha \equiv -\varepsilon \pmod 4, \qquad A = \left(1 - \frac{\delta}{2^{\frac{\varkappa-1}{2}}}\right); \qquad (\varepsilon^1 = -1,\ \delta = -\varepsilon . \delta^1)$$

$$\alpha \equiv \varepsilon \pmod 4, \qquad A = \left(1 + \frac{\delta}{2^{\frac{\varkappa-1}{2}}} - \frac{1}{2^{\varkappa-2}}\right) = \left(1 - \frac{\delta}{2^{\frac{\varkappa-1}{2}}}\right)\left(1 + \frac{\delta^1}{2^{\frac{\varkappa-3}{2}}}\right).$$

$$(\varepsilon^1 = 1,\ \delta = \delta^1)$$

Oder f ist vom Typus:

$$f \equiv (I) + 2(I)_1 \pmod 4. \tag{2}$$

Alsdann bewirkt ein jedes Glied $2\mathfrak{a}\mathfrak{x}^2 \equiv 2\mathfrak{x} \pmod 4$ aus $2(I)_1$, dass $f \equiv 1$ und $f \equiv 3 \pmod 4$ sowohl gleichviel Lösungen erster, wie gleichviel Lösungen zweiter Art besitzen, und man findet:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^{\varkappa-1}}\right).$$

<u>$(\sigma_1 = 2)$.</u>

Wenn $\sigma_1 = 2$ ist, so lässt f sich zugleich in der Form schreiben:

$$f \equiv 2(\alpha\xi^2 + \mathsf{A}\xi\tilde{\xi} + \tilde{\alpha}\,\tilde{\xi}^2) + 2^{\omega_2} f^{(2)} \pmod{2^t},$$

wo α und A ungerade sind, und $f^{(2)}$ einen in Bezug auf 2 primitiven Rest bedeutet. Die Invarianten $\sigma_h^{(2)}$ und $2^{\omega_h^{(2)}}$ von $f^{(2)}$ bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\sigma_{h-2}^{(2)} = \sigma_h, \qquad \omega_{h-2}^{(2)} = \omega_h. \qquad (h = 3, 4, \ldots, n-1)$$

Wir betrachten die $f(2^t)$ Substitutionen T von einer Determinante $\equiv 1 \pmod{2^t}$, welche den Rest f in sich selbst verwandeln. In jeder dieser Substitutionen muss die erste Verticalreihe von n Zahlen $\xi_i \pmod{2^t}$ gebildet werden, welche

$$f(\xi_i) \equiv 2\alpha \pmod{2^t} \tag{t}$$

ergeben. Ferner dürfen diese Zahlen nicht zugleich alle Bedingungen

$$\xi_1 \equiv 0,\ \xi_2 \equiv 0,\ \ldots,\ \xi_{\varkappa_1} \equiv 0 \pmod 2 \tag{c}$$

erfüllen (*F. Q.*, p. 175 und 129). Wir bezeichnen mit $2A\,.\,2^{(n-1)t}$ die Anzahl aller Systeme ξ_i (mod 2^t), welche der Congruenz (t), aber nicht sämmtlichen Congruenzen (c) genügen.

Jedes dieser Systeme ξ_i tritt wirklich in mindestens einer von den Substitutionen T als erste Verticalreihe auf (*F. Q.*, pp. 175—177), also etwa in einem T_0. Es frägt sich, für wieviel verschiedene T ein solches System ξ_i die erste Verticalreihe bildet; offenbar für alle diejenigen T, welche zusammengesetzt sind aus T_0 und aus einer Substitution T mit der ersten Verticalreihe 1, 0, ..., 0. Man hat also zu ermitteln, wie viele Substitutionen vom Typus

$$T \equiv \begin{vmatrix} 1, & U\;, & \dots\dots \\ 0, & \eta_0\;, & \dots\dots \\ 0, & \eta_1\;, & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ 0, & \eta_{n-2}, & \dots\dots \end{vmatrix} \equiv 1 \pmod{2^t}$$

den Rest f in sich selbst transformiren.

Setzen wir

$$f^{(1)} \equiv (4\alpha\tilde{\alpha} - \mathsf{A}^2)\,\eta_0^2 + 2^{\omega_2+1}\,.\,\alpha\,.\,f^{(2)}(\eta_1, \dots, \eta_{n-2}) \pmod{2^{t+1}},$$

so entsteht zunächst die Bedingung

$$f^{(1)}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-2}) \equiv (4\alpha\tilde{\alpha} - \mathsf{A}^2) \pmod{2^{t+1}}.$$

Dieser Congruenz mögen $\frac{1}{2}A^{(1)}\,.\,2^{(n-2)t}$ verschiedene Systeme η_i (mod 2^t) Genüge leisten. Durch Ueberlegungen, wie sie in *F. Q.*, pp. 176—177, angestellt sind, überzeugt man sich, dass wirklich jedem dieser Systeme η_i Substitutionen T zukommen, welche den Rest f in sich selbst transformiren; es frägt sich wieviele.

Die Gesammtheit aller solcher T wird hervorgehen, indem man eine beliebige unter ihnen, etwa T_0, mit allen Substitutionen

$$\mathfrak{T} \equiv \begin{vmatrix} 1, & U, & V_1, & \ldots, & V_{n-2} \\ 0, & 1, & \tilde{V}_1, & \ldots, & \tilde{V}_{n-2} \\ 0, & 0, & t_1^1, & \ldots, & t_1^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & t_{n-2}^1, & \ldots, & t_{n-2}^{n-2} \end{vmatrix} \equiv 1 \pmod{2^t}$$

zusammensetzt, welche $f \pmod{2^t}$ in sich selbst überführen. Für $\mathfrak{T}$ findet man $2U \equiv 0$, $V_h \equiv 0$, $\tilde{V}_h \equiv 0 \pmod{2^t}$; und man erkennt, dass die Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{T}$ durch $2F(2^t)$ ausgedrückt ist, falls F den Rest $2^{\omega_2}f^{(2)}$ bedeutet. So ergiebt sich die Beziehung

$$f(2^t) = 2^{(n-1)t+(n-2)t+1+\omega_2[(n-2)^2-1]} . A . A^{(1)} . f^{(2)}(2^{t-\omega_2}).$$

Nun hat man zugleich

$$f^{(1)}(2^{t+1}) = 2^{(n-2)(t+1)+(\omega_2+1)[(n-2)^2-1]} . A^{(1)} . f^{(2)}(2^{t-\omega_2});$$

also kommt endlich:

$$f(2^t) = 2^{(n-1)t-n(n-3)} . A . f^{(1)}(2^{t+1}).$$

Um die Grösse A zu finden, beachte man, dass das System der $\varkappa_1$ Congruenzen (c) sich als identisch mit dem Systeme $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \equiv 0 \pmod{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ erweist. Nach 4. (4) muss infolgedessen $A . 2^{n-1}$ die Anzahl aller Lösungen von

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{2} f(\xi_i) \equiv 1 \pmod{2}$$

vorstellen, bei welchen die n Zahlen $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ nicht sämmtlich gerade sind. Wir wollen für $\varkappa_1$ einfach $\varkappa$ setzen.

Entweder ist $\frac{1}{2} f$ vom Typus:

$$[1] \qquad \frac{1}{2} f \equiv (II) \pmod{2}.$$

In diesem Falle liefern die Congruenzen (c) stets $f \equiv 0 \pmod{4}$; sie

sind also nicht mit (α) verträglich. Gehört zu (II) wie oben eine Einheit θ, so kommt demnach:

$$A = \left(1 - \frac{\theta}{2^{\frac{\varkappa}{2}}}\right).$$

Oder $\frac{1}{2}f$ ist vom Typus:

[2] $$\frac{1}{2}f \equiv (II) + (I) \pmod 2.$$

Dann erscheint in (I) ein Glied $\mathfrak{a}\mathfrak{x}^2 \equiv \mathfrak{x} \pmod 2$, welches zur Folge hat, dass $\frac{1}{2}f \equiv 0$ und $\frac{1}{2}f \equiv 1 \pmod 2$ gleichviel Lösungen zulassen, man betrachte diese Congruenzen für sich oder zusammen mit den Congruenzen (c). Man erhält also:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^{\varkappa}}\right).$$

Die Grösse $A^{(1)}$ bestimmt sich mit Hilfe der Formeln aus ($\sigma_1 = 1$). Im Falle [1] findet man, wenn $\varkappa = 2$: $A^{(1)} = 4$, und wenn $\varkappa > 2$:

$$A^{(1)} = 2\left(1 + \frac{\theta^1}{2^{\frac{\varkappa}{2}-1}}\right), \quad \text{wobei} \quad \theta = \left(\frac{2}{4a\tilde{a} - \mathsf{A}^2}\right).\theta^1;$$

im Falle [2] wird immer $A^{(1)} = 2$.

Wir setzen jetzt allgemein:

$$f(2^t) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}t + \sum\limits_h^{1,n-1} \omega_h\left(\frac{(n-h)(n-h+1)}{2}-1\right)} . \prod_h^{1,n-1} \sigma_h . f\{2\}. \quad \left(t > 1 + \sum_h^{1,n-1} \omega_h\right)$$

Unsere Recursionsformeln gehen dann in

$$f\{2\} = A.f^{(1)}\{2\}$$

über, und auf Grund der gefundenen Werthe von A können wir den vollständigen Ausdruck der Grösse $f\{2\}$ hinschreiben.

Es bedeute, wie bisher, f einen aus λ Gliedern bestehenden Hauptrest, wo λ gleich ist der um 1 vermehrten Anzahl aller durch 2 theilbaren Grössen 2^{ω_h} $(h = 1, \ldots, n-1)$. Ferner bezeichne $\mu - 1$ die Anzahl aller Grössen aus der Reihe $\sigma_{h-1} 2^{\omega_h} \sigma_{h+1}$ $(h = 1, \ldots, n-1)$, welche den Factor 4 enthalten, und $\nu - 1$ die Anzahl aller Grössen dieser Reihe, welche durch 8 aufgehen.

Die Grösse $f\{2\}$ *ist dann gleich einem Producte aus der Potenz* $\dfrac{2^{(2\mu-1)+(\nu-1)}}{\Pi \sigma_h}$ *und aus* λ *Factoren* $\mathfrak{A}_k$, *welche den* λ *einzelnen Resten* Φ_k *entsprechen, und folgendermaassen bestimmt werden:*

(I). *So oft* Φ_k *ein Rest vom Typus* $(\mathrm{R_I})$ *ist, nehme man:*

$$\mathfrak{A}_k = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^{2\left[\frac{\varkappa_k - 1}{2}\right]}}\right) \cdot \mathfrak{a}_k,$$

und setze $\mathfrak{a}_k = 1$, *falls die Zahlen* $\tau_{k-1} \cdot 2^{\omega_{g_{k-1}}}$ *und* $2^{\omega_{g_k}} \cdot \tau_{k+1}$ *nicht beide durch* 4 *theilbar sind; andernfalls aber bilde man für* Φ_k, *gemäss den Formeln* (I), *zwei Einheiten* ε_k *und* δ_k, *und setze:*

1) *wenn* $\varkappa_k \equiv 0 \pmod 2$,

$$\text{je nachdem } \varepsilon_k = 1 \quad \text{oder} \quad = -1 \quad \text{ist,}$$

$$\mathfrak{a}_k = \left(1 + \delta_k \cdot 2^{-\frac{\varkappa_k}{2}+1}\right)^{-1} \quad \text{oder} \quad = 1;$$

2) *wenn* $\varkappa_k \equiv 1 \pmod 2$,

$$\mathfrak{a}_k = \left(1 + \delta_k \cdot 2^{-\frac{\varkappa_k - 1}{2}}\right)^{-1}.$$

(II). *So oft* Φ_k *ein Rest vom Typus* $(\mathrm{R_{II}})$ *ist, nehme man:*

$$\mathfrak{A}_k = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^{\varkappa_k}}\right) \cdot \mathfrak{a}_k,$$

und setze $\mathfrak{a}_k = 1$, *falls die Zahlen* $\tau_{k-1} \cdot 2^{\omega_{g_{k-1}}}$ *und* $2^{\omega_{g_k}} \cdot \tau_{k+1}$ *nicht beide durch* 4 *theilbar sind; andernfalls aber bilde man für* Φ_k, *gemäss der Formel* (II), *eine Einheit* θ_k, *und setze:*

$$\mathfrak{a}_k = \left(1 + \theta_k \cdot 2^{-\frac{\varkappa_k}{2}}\right)^{-1}.$$

Die Richtigkeit dieser Ausdrücke ergiebt sich mit Hilfe eines Schlusses von $n-1$ auf n.

Wir erwähnen noch folgende Relation. Bedeutet $M - 1$ die Anzahl aller durch 4 theilbaren Grössen $\tau_k \cdot 2^{\omega \vartheta_k} \cdot \tau_{k+1}$, so hat man

$$2^{n-1} = 2^{M-1} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}}{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_\lambda}.$$

Die Congruenzen $f(\xi_i) \equiv m \pmod{2^t}$ sind sehr eingehend von Herrn C. Jordan in der Abhandlung *Sur la forme canonique des congruences du second degré et le nombre de leurs solutions* [1] untersucht worden. Die über diesen Gegenstand hier angestellten Betrachtungen sind indess wesentlich anderer Art. Die am Anfange gegebenen Werthe der Zahlen Ψ_h und X_h wird man auch aus Art. 8. des *Mémoire sur la représentation des nombres par des sommes de cinq carrés* [2] von H. Smith ableiten können.

7. *Die Grössen $f\{q\}$ in ihrer Abhängigkeit von den Characteren C.*

Die Einheiten, welche in den Grössen $f\{q\}$ auftreten, sind offenbar Invarianten der Form f. Sie müssen sich daher mit Hilfe der besonderen Charactere C ausdrücken lassen, die wir in 2. aufgezählt haben.

Um dieses darzuthun setzen wir f, wie in 2., als characteristische Form ihres Genus voraus. Die aus den ersten h Reihen von f gebildeten symmetrischen Minoren mögen also Werthe $\sigma_h d_{h-1} \varphi_h$ von solcher Art liefern, dass ein jedes φ_h relativ prim zu $2 o_1 o_2 \ldots o_{n-1}$ und zu $\varphi_{h-1} \cdot \varphi_{h+1}$ ausfällt. Ferner sei f primitiv.

Bedeutet q zunächst irgend eine ungerade Primzahl, die nicht in Δ aufgeht, so hängt $f\{q\}$, ausser von der Zahl n, nur in dem Falle eines geraden n, noch von einer Einheit θ ab. Man findet dieselbe gleich

$$\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \Delta}{q}\right) = \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1} o_1 o_3 \ldots o_{n-3} o_{n-1}}{q}\right).$$

Ist weiter $q = p$ irgend eine ungerade Primzahl aus Δ, so sind, laut Voraussetzung, sämmtliche Zahlen φ_h zu p prim. Wir besitzen also in f eine *Grundform* für den Modul p (*F. Q.*, pp. 35—36). Die Classe f

[1] Journal de Liouville, Deuxième Série, T. XVII, 1872, pp. 368—402.

[2] Mémoires présentés à l'Académie des Sciences de Paris, T. XXIX, N° 1.

liefert infolgedessen für einen jeden Modul p^t unter anderen Resten auch folgenden Hauptrest:

$$\varphi \equiv \left| \begin{array}{cccc} \frac{\sigma_1\varphi_1}{\sigma_0\varphi_0}, & & & \\ & o_1 \cdot \frac{\sigma_2\varphi_2}{\sigma_1\varphi_1}, & & \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ & & & o_1 o_2 \ldots o_{n-1} \cdot \frac{\sigma_n\varphi_n}{\sigma_{n-1}\varphi_{n-1}} \end{array} \right| \pmod{p^t}.$$

In dem Ausdrucke von $f\{p\} = \varphi\{p\}$ gehört zu jeder von den λ Zahlen $\varkappa_k$, welche gerade ausfällt, eine Einheit θ. Setzt man $\vartheta_{k-1} = r$, $\vartheta_k = s$, und ist also $s - r = \varkappa_k \equiv 0 \pmod 2$, so nimmt eine solche Einheit den Werth an:

$$\left(\frac{(-1)^{\frac{s-r}{2}} o_{r+1} o_{r+3} \ldots o_{s-3} o_{s-1} \cdot \sigma_r\varphi_r\sigma_s\varphi_s}{p}\right).$$

Endlich sei $q = 2$. Nach Voraussetzung sind alle Zahlen φ_h ungerade, und f stellt eine *Grundform* für den Modul 2 vor. Man gewinnt daher, nach *F. Q.*, pp. 34—36, einen Hauptrest

$$\varphi \equiv \{\Phi_1 + 2^{\omega_{\vartheta_1}}[\Phi_2 + \ldots + 2^{\omega_{\vartheta_{\lambda-1}}}(\Phi_\lambda)]\} \pmod{2^t}$$

der Classe f, indem man die Einzelreste Φ_l in folgender Weise auswählt. Zur Abkürzung sei $\vartheta_{k-1} = r$, $\vartheta_k = s$; dann nehme man, wenn $\tau_k = 1$:

$$\left. \begin{array}{c} \dfrac{2^{\omega_r} \cdot \Phi_k}{o_1 o_2 \ldots o_r} \equiv \psi_1 + o_{r+1}\psi_2 + \ldots + o_{r+1} o_{r+2} \ldots o_{s-1} \psi_{s-r} \\ \psi_i \equiv \dfrac{\varphi_{r+i}}{\varphi_{r+i-1}} \xi_i^2 \end{array} \right| \pmod{2^{t-\omega_r}}.$$

und wenn $\tau_k = 2$, also jedenfalls $s - r \equiv 0 \pmod 2$:

$$\left. \begin{array}{c} \dfrac{2^{\omega_r}}{o_1 o_2 \ldots o_r} \cdot \Phi_k \equiv \psi_1 + o_{r+1} o_{r+2} \psi_2 + \ldots + o_{r+1} o_{r+2} \ldots o_{s-2} \psi_{\frac{s-r}{2}} \\ \psi_i \equiv \dfrac{2\varphi_{r+2i-1}}{\varphi_{r+2i-2}} \xi_i^2 + 2A_i \xi_i \eta_i + \dfrac{o_{r+2i-1}\varphi_{r+2i} - A_i^2 \varphi_{r+2i-2}}{2\varphi_{r+2i-1}} \eta_i^2 \end{array} \right| \pmod{2^{t-\omega_r}},$$

wo die A_i irgend welche ungerade Zahlen bedeuten sollen.

So oft nun $\tau_k = 1$ ist und die Zahlen $\sigma_{r-1} 2^{\nu_r}$ und $2^{\nu_r}\sigma_{s+1}$ beide durch 4 theilbar sind, kommen für den Ausdruck $f\{2\}$ zwei aus den Coefficienten von Φ_k gebildete Einheiten ε und δ in Betracht. Indem man wiederholt die für ungerade a und α geltende Congruenz

$$\frac{a\alpha - 1}{2} \equiv \frac{a-1}{2} + \frac{\alpha - 1}{2} \pmod 2$$

anwendet, ergiebt sich ε als eine Potenz von -1 mit dem Exponenten:

$$\frac{\varphi_r - 1}{2} + \frac{\varphi_s - 1}{2} + \sum \frac{o_{s-2u+1} + 1}{2}, \qquad \left(u = 1, 2, \ldots, \left[\frac{s-r}{2}\right]\right)$$

während δ aus zwei Potenzen von -1 zusammengesetzt erscheint, von denen die eine den Exponenten:

$$\frac{\varphi_r - 1}{2}\cdot\frac{\varphi_{r+1} - 1}{2} + \frac{\varphi_{r+1} - 1}{2}\cdot\frac{\varphi_{r+2} - 1}{2} + \ldots + \frac{\varphi_{s-1} - 1}{2}\cdot\frac{\varphi_s - 1}{2} + \sum_h^{r+1, s-1} \frac{\varphi_h - 1}{2}\cdot\frac{o_h + 1}{2}$$

und die andere den Exponenten:

$$\frac{\varphi_r + (-1)^{s-r}}{2}\cdot\left(\frac{\varphi_s - 1}{2} + \sum \frac{o_{s-2u+1} + 1}{2}\right) + \frac{\varphi_s - 1}{2}\cdot\sum \frac{o_{s-2v} + 1}{2}$$

$$+ \sum \frac{o_{s-2\mathfrak{u}+1} + 1}{2}\cdot\frac{o_{s-2\mathfrak{v}} + 1}{2} \qquad \left(\begin{matrix} u, v, \mathfrak{u}, \mathfrak{v} = 1, 2, \ldots, \left[\frac{s-r}{2}\right] \\ \mathfrak{u} \leqq \mathfrak{v} \end{matrix}\right)$$

erhält.

Die erste Potenz aus δ findet man mit Hilfe der Formeln aus *F. Q.*, p. 85 gleich

$$\left|\left(\frac{\varphi_{r+1}}{\mathfrak{e}_r\varphi_r}\right)(-1)^{\frac{I_r(I_r+1)}{2}}\right|\left|\left(\frac{\varphi_{s-1}}{\mathfrak{e}_s\varphi_s}\right)(-1)^{\frac{I_s(I_s-1)}{2}}\right|\cdot\prod_h^{r+1, s-1}\left(\frac{\varphi_h}{o_h}\right),$$

während die zweite, ebenso wie die Einheit ε sich unmittelbar durch die Charactere $(-1)^{\frac{\varphi_r - 1}{2}}$ und $(-1)^{\frac{\varphi_s - 1}{2}}$ ausdrückt.

Es verdient beachtet zu werden, dass in $f\{2\}$ die Einheiten ε und δ nur in der Verbindung $\frac{\delta + \delta^-}{2}$ auftreten, wo $\delta^- = \delta \cdot \varepsilon^{\varkappa_k - 1}$ die zu $-\Phi_k$ gehörige Einheit δ bedeutet.

So oft ferner $\tau_k = 2$ ist, und die Zahlen $\sigma_{r-1} 2^{\tau_r}$ und $2^{\tau_s} \sigma_{s+1}$ beide durch 4 theilbar sind, begegnet man in $f\{2\}$ einer aus den Coefficienten von Φ_k gebildeten Einheit

$$\theta = \left(\frac{2}{o_{r+1} o_{r+3} \ldots o_{s-3} o_{s-1} \varphi_r \varphi_s}\right).$$

Wir bemerken schliesslich, dass die mit $f = \sum a_{ik} x_i x_k$ adjungirte Form $f' = \frac{(-1)^I}{d_{n-2}} \cdot \sum \frac{\partial \Delta}{\partial a_{n-i+1,\, n-k+1}} x'_i x'_k$ lauter Grössen $f'\{q\}$ liefert, welche mit den Grössen $f\{q\}$ identisch sind. Es erhellt dieses leicht aus dem Umstande, dass die Invarianten o'_h, σ'_h und die Zahlen φ'_h der Form f' die Gleichungen erfüllen:

$$o'_h = o_{n-h}, \qquad \sigma'_h = \sigma_{n-h}, \qquad \varphi'_h = (-1)^I \cdot \varphi_{n-h}.$$

8. *Ausdruck für die Formenanzahl eines Genus.*

Irgend ein primitives Genus f sei definirt durch seine Invarianten I, o_h, σ_h, C, welche allen für die Existenz des Genus nothwendigen Bedingungen genügen mögen. Wir bilden, nach den in 5., 6. und 7. angegebenen Regeln, die verschiedenen Grössen $f\{q\}$, welche zu unserem Genus gehören. Wir setzen ferner

$$\mathfrak{D} = \prod_h^{1,\, n-1} o_h^{h(n-h)}$$

und

$$C_n = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{\frac{n(n+1)}{2}}},$$

wo $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$.

Wir wollen von dem Falle absehen, wo $n = 2$ und $(-1)^I o_1 = \Delta$ eine negative Quadratzahl ist, das Genus also lauter zerlegbare Formen enthält.

Schliesst man diesen Fall aus, so besitzt das über alle möglichen Primzahlen $q = 2, 3, 5, \ldots$ erstreckte Product

$$1)\qquad M = c_n \cdot \frac{\sqrt{\mathfrak{D}}}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}} \cdot \frac{1}{f\{2\}} \cdot \frac{1}{f\{3\}} \cdot \frac{1}{f\{5\}} \cdots \frac{1}{f\{q\}} \cdots$$

stets einen endlichen Werth.

Um dieses nachzuweisen, wollen wir in M die Grösse

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]}}\right)}{f\{q\}} = E_q$$

als allgemeines Glied einführen. Solches kann leicht geschehen, indem man mit der Identität

$$1 = S_2 S_4 \ldots S_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]} \cdot \prod_q \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]}}\right)$$

multiplicirt, wo S_{2k} die Summe $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{z^{2k}}$ bedeutet. Man weiss, dass diese Summe den Werth $\frac{1}{2} B_k \cdot \frac{(2\pi)^{2k}}{|\underline{(2k)}}$ hat, falls unter B_k die k^{te} Bernoulli'sche Zahl verstanden wird.

Für jede nicht in 2Δ enthaltene Primzahl p kommt, wenn $n \equiv 1 \pmod 2$:

$$E_p = 1,$$

und wenn $n \equiv 0 \pmod 2$:

$$E_p = \left| 1 - \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \Delta}{p}\right) p^{-\frac{n}{2}} \right|^{-1}. \qquad \left(\frac{\Delta}{p}\right) - \left(\frac{(-1)^{\prime} \cdot \mathfrak{D}}{p}\right)$$

Sind also die nicht in Δ aufgehenden, ungeraden Primzahlen, ihrer Grösse nach geordnet: p, p', p'', etc., so wird das unendliche Product:

$$E_p E_{p'} E_{p''} \ldots,$$

je nachdem $n \equiv 1 \pmod 2$ oder $n \equiv 0 \pmod 2$, gleich 1 oder gleich der Summe:

$$\sum \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \Delta}{m}\right) \frac{1}{m^{\frac{n}{2}}},$$

wo m alle positiven und zu 2Δ relativ primen ganzen Zahlen durchläuft. Zur Bezeichnung dieser Dirichlet'schen Summe mag das Symbol

$$D_{\frac{n}{2}}\left[(-1)^{\frac{n}{2}} \Delta\right]$$

dienen.

Man setze nun:

$$c_n \,.\, S_2 S_4 \ldots S_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]} = \mathfrak{c}_n,$$

d. i., wenn $n \equiv 1 \pmod 2$:

$$\mathfrak{c}_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} . B_1 B_2 \ldots B_{\frac{n-1}{2}} . \frac{1}{1 \,.\, 2 \ldots \frac{n-1}{2}},$$

und wenn $n \equiv 0 \pmod 2$:

$$\mathfrak{c}_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-4}{2}} . B_1 B_2 \ldots B_{\frac{n-2}{2}} . \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}},$$

und lasse ferner ∂ alle Primzahlen aus $2\mathfrak{D}$ durchlaufen. Dann können wir endlich schreiben, wenn $n \equiv 1 \pmod 2$:

2) $$M = \mathfrak{c}_n \,.\, \frac{\sqrt{\mathfrak{D}}}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}} . \prod_{\partial} E_{\partial},$$

und wenn $n \equiv 0 \pmod 2$:

2) $$M = \mathfrak{c}_n \,.\, \frac{\sqrt{\mathfrak{D}}}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}} . \prod_{\partial} E_{\partial} \,.\, D_{\frac{n}{2}}\left[(-1)^{\frac{n}{2}-I} . \mathfrak{D}\right].$$

Diese Ausdrücke zeigen in der That, dass M einen endlichen und positiven Werth annimmt.

Für ein Genus von binären zerlegbaren Formen gewinnt man ein ähnliches convergentes Product M, indem man $\frac{1-\frac{1}{q}}{f\{q\}}$ an die Stelle von $\frac{1}{f\{q\}}$ treten lässt.

Wir behaupten nun:

Die Formenanzahl unseres Genus besitzt den Ausdruck:

$$M.\Omega,$$

wo M das angegebene Product und Ω eine positive unendliche Grösse bedeutet, die nur von n und I und von der Anzahl der Darstellungen der Zahl 0 *durch die Formen des Genus abhängt.*

In den Fällen eines definiten Genus ($I=0$ oder $I=n$) ist insbesondere dieses Ω gleich der Anzahl aller ganzzahligen n-reihigen Substitutionen von der Determinante 1, *und mithin M gleich der über alle Classen Cl des Genus erstreckten Summe* $\sum \frac{1}{t(Cl)}$.

Wir werden uns begnügen, das vorstehende Resultat für die Fälle definiter (und zwar positiver) Genera zu erweisen. Dabei werden wir von den DIRICHLET'schen Methoden [1] Gebrauch machen, und in den Fällen $n>2$ einen Schluss von $n-1$ auf n zu Hülfe nehmen.

Zweiter Theil.

9. *Das Maass eines positiven Genus dargestellt durch einen gewissen Grenzwerth.*

Ein positives Genus G von $n(\geqq 2)$ Variabeln sei definirt durch seine Ordnung O:

$$d_0, \quad \begin{pmatrix} \sigma_1, & \sigma_2, & \dots, & \sigma_{n-2}, & \sigma_{n-1} \\ o_1, & o_2, & \dots, & o_{n-2}, & o_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad I=0$$

[1] DIRICHLET, *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres.* (CRELLE's Journal, Bd. XIX.)

und seine Charactere C. Wir setzen voraus, dass dieselben den für die Existenz des Genus nothwendigen Bedingungen genügen. d_0 sei gleich 1, das Genus also primitiv.

Es sei Δ die Determinante des Genus, und R eine beliebige zu 2Δ relativ prime ganze Zahl. Durch die Kenntniss der Invarianten O und C sind wir befähigt, die Reste unseres Genus für einen jeden beliebigen Modul hinzuschreiben. Insbesondere können wir also irgend einen Hauptrest φ in Bezug auf den Modul $\sigma_1 . 8\Delta R$ angeben. Der erste Coefficient von φ heisse $\sigma_1\alpha$. Die Zahl α ist dann sicher relativ prim zu $8\Delta R$.

Wir richten unser Augenmerk auf den quadratischen Character von α in Bezug auf den Modul $8\Delta R$. Enthält Δ im Ganzen $\mathfrak{d}$ ungerade Primzahlen ∂, und R im Ganzen $\mathfrak{r}$ ungerade Primzahlen r, so wird dieser Character durch die Gesammtheit der folgenden $2 + \mathfrak{d} + \mathfrak{r}$ Symbole definirt:

$$C(\alpha) \qquad (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{\alpha}\right), \quad \left(\frac{\alpha}{\partial}\right), \quad \left(\frac{\alpha}{r}\right).$$

Diese Symbole können zum Theil Charactere des Genus vorstellen, zum Theil können sie bei anderer Wahl des Restes φ andere Werthe erlangen.[1]

---

[1] Man überzeugt sich leicht, dass in dieser Beziehung die nachstehenden Sätze gelten:

Eine jede Einheit $\left(\frac{\alpha}{r}\right)$ kann sowohl gleich $+1$ wie gleich -1 ausfallen.

Eine Einheit $\left(\frac{\alpha}{\partial}\right)$ hat einen festen Werth, wenn $o_1 \equiv 0 \pmod{\partial}$, also φ von dem Typus $\sigma_1\alpha\xi^2 \pmod{\partial}$ ist. Sonst kann dieselbe beide Werthe ± 1 annehmen.

Was die Einheiten $(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ und $\left(\frac{2}{\alpha}\right)$ anlangt, so unterliegen dieselben keiner Beschränkung, wenn $\sigma_1 = 2$ ist. Ebenso im Allgemeinen, wenn $\sigma_1 = 1$ ist; nur bestehen hier die folgenden Ausnahmefälle:

1. Ist $\varphi \equiv \alpha\xi^2 \pmod 8$, so sind beide Einheiten $(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ und $\left(\frac{2}{\alpha}\right)$ Charactere.

2. Ist $\varphi \equiv \alpha\xi^2 \pmod 4$, oder $\varphi \equiv \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \pmod 4$ und $\alpha \equiv \beta \pmod 4$, oder $\varphi \equiv \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 \pmod 4$ und $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \pmod 4$, so hat die Einheit $(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ einen festen Werth.

Wie in 6. bezeichnen wir mit $\varkappa$ den Index der ersten von den n Zahlen $o_1, o_2, \ldots, o_{n-1}, o_n (= 0)$, welche gerade ausfällt.

Wir denken uns in jeder überhaupt existirenden Classe des Genus je eine Form ausgesucht, welche nach dem Modul $\sigma_1 . 8\Delta R$ den Rest φ lässt. Eine beliebige der so gewonnenen Formen sei f.

Wir bestimmen für die Variabeln von f alle Systeme $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, welche dem Ausdrucke $f(\xi_i)$ einen Werth $\sigma_1 m$ ertheilen, wo m prim zu $8\Delta R$ ist und den Gleichungen

$$C(m) = C(\alpha)$$

genügt, welche aber dabei, falls $\varkappa > 1$ ist, nicht die Bedingungen

$$(c) \qquad \xi_1 \equiv \xi_2 \equiv \ldots \equiv \xi_\varkappa \equiv \sigma_1 \pmod 2$$

erfüllen. Ueber alle diese Werthsysteme $\xi_i (\gtrless 0, 0, \ldots, 0)$ erstrecken wir alsdann die Summe

$$\Xi = \rho \sum \frac{1}{\left\{\frac{1}{\sigma_1} f(\xi_i)\right\}^{\frac{n}{2}(1+\rho)}},$$

und wir wollen den Grenzwerth ermitteln, welchen diese Summe für ein positives, unendlich abnehmendes ρ erreicht.

Die definirten Werthsysteme ξ_i werden in einer gewissen Anzahl A von arithmetischen Progressionen

$$\xi_1 = 8\Delta R . X_1 + v_1, \quad \xi_2 = 8\Delta R . X_2 + v_2, \quad \ldots, \qquad \xi_n = 8\Delta R . X_n + v_n$$

---

3. Ist $\varphi \equiv a\xi^2 + 2\beta\eta^2 \pmod 8$ und setzt man $(-1)^{\frac{a\beta+1}{2}} = \varepsilon$, so können $(-1)^{\frac{a-1}{2}}$ und $\left(\frac{2}{a}\right)$ sich nur mit φ so ändern, dass $\varepsilon^{\frac{a-1}{2}} . \left(\frac{2}{a}\right)$ fest bleibt.

4. Wenn $\varphi \equiv a\xi^2 + 2(\beta\eta^2 + \gamma\zeta^2) \pmod 8$, so sind für die Einheiten $(-1)^{\frac{a-1}{2}}$ und $\left(\frac{2}{a}\right)$ nur drei von den vier Systemen $\pm 1, \pm 1$ zulässig. Ist nämlich $\beta \equiv -\gamma \pmod 4$, so kann der Fall nicht eintreten, dass $(-1)^{\frac{a-1}{2}}$ ungeändert bleibt, während $\left(\frac{2}{a}\right)$ in $-\left(\frac{2}{a}\right)$ übergeht, und hat man $\beta \equiv \gamma \equiv \theta . a \pmod 4$, $\theta = \pm 1$, so ist der Fall ausgeschlossen, dass $(-1)^{\frac{a-1}{2}}$ in's Gegentheil umschlägt, während $\left(\frac{2}{a}\right)$ sich in $\theta . \left(\frac{2}{a}\right)$ verwandelt.

enthalten sein. Man bezeichne mit $2^{3(n-1)}.A_2$, wenn $\varkappa > 1$, die Anzahl aller derjenigen Lösungen ξ_i (mod 8) von

$$\frac{1}{\sigma_1}\varphi(\xi_i) \equiv \alpha \pmod{8},$$

welche nicht zugleich den Bedingungen (c) genügen, und wenn $\varkappa = 1$, die Anzahl aller möglichen Lösungen dieser Congruenz; ferner mit $2^{n-1}.A_p$ die Anzahl aller Lösungen von

$$\varphi(\xi_i) \equiv \sigma_1\alpha \pmod{p},$$

wenn p eine der ungeraden Primzahlen aus ΔR bedeutet. In den Ausdrücken von A_2 und A_p erscheint α, wie wir wissen, nur in den Einheiten $C(\alpha)$. Dieser Umstand lässt erkennen, dass die Anzahl A den Werth hat:

$$\mathsf{A} = (8\Delta R)^n.\frac{1}{2}\prod_q\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)A_q\right\}, \qquad {\scriptstyle (q=2,\,\mathfrak{d},\,\mathfrak{r})}$$

wo q die $1+\mathfrak{d}+\mathfrak{r}$ Primzahlen von $8\Delta R$ durchläuft.

Setzt man für die ξ_i zunächst nur alle diejenigen Systeme, welche in einer der A Progressionen vorkommen, so ergiebt sich der Grenzwerth der entstehenden Summe für ein $\rho = +0$, nach *F. Q.*, p. 148, gleich

$$c_n.\frac{(8\Delta R)^{-n}}{\sqrt{\dfrac{\Delta}{\sigma_1^n}}},$$

wo

$$c_n = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} = \pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}.\frac{2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{n(n-2)\ldots\left(n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)}.$$

Für die ganze Summe Ξ wird daher

$$\operatorname{Lim}(\Xi)_{(\rho=0)} = c_n.\frac{(8\Delta R)_1}{2^{2+\mathfrak{d}+\mathfrak{r}}}.\frac{\sigma_1^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\Delta}}.\prod_q A_q, \qquad {\scriptstyle (q=2,\,\mathfrak{d},\,\mathfrak{r})}$$

wo $(8\Delta R)_1$ das über alle Primzahlen q von $8\Delta R$ erstreckte Product $\prod\left(1-\frac{1}{q}\right)$ bedeutet.

Eine Summe X, von ähnlicher Beschaffenheit wie Ξ, mag jetzt nur alle solchen Systeme $\xi_i = x_i$ umfassen, in welchen die n Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Offenbar entstehen alle möglichen Systeme ξ_i, wenn wir diese besonderen Systeme x_i mit allen positiven und zu $8\Delta R$ relativ primen Zahlen z multipliciren. Man findet daher

$$\Xi = X.\sum \frac{1}{z^{n(1+\rho)}},$$

und in der Grenze für $\rho = 0$:

$$\operatorname{Lim}\left(\frac{\Xi}{X}\right) = \sum \frac{1}{z^n}.$$

Die hier auftretende Summe hat bekanntlich den Werth:

$$(8\Delta R)_n \, . \, S_n,$$

wenn S_n die Summe $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$ und $(8\Delta R)_n$ das über alle Primzahlen q von $8\Delta R$ erstreckte Product $\prod\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$ ausdrückt.

Wir bemerken noch, dass die Summe X sich in $t(f)$ unter einander identische Summen X_0 zerlegen lässt. Dabei ist unter $t(f)$, wie in 1., die Anzahl aller Substitutionen von der Determinante 1 verstanden, welche die Form f in sich selbst transformiren. (Solche Summen X_0 haben dann auch in Fällen indefiniter Formen einen Sinn.)

Wir bilden endlich eine Doppelsumme:

$$S = \rho \, . \sum \frac{1}{t(f)} . \sum \frac{1}{\left|\frac{f(x_i)}{\sigma_1}\right|^{\frac{n}{2}(1+\rho)}},$$

erstreckt, einmal: über alle die inäquivalenten Formen $f (\equiv \varphi, \bmod \sigma_1 . 8\Delta R)$, die wir oben als Repräsentanten der einzelnen Classen des Genus aufgestellt hatten; und dann, für jede dieser Formen f: über alle solchen Systeme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ohne gemeinsamen Theiler, welche einer Congruenz

$$\frac{f(x_i)}{\sigma_1} \equiv \alpha z^2 \pmod{8\Delta R}$$

genügen, wo z zu $8\Delta R$ relativ prim ist, und welche dabei, falls $\varkappa > 1$, nicht alle Bedingungen

$$(c) \qquad x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_\varkappa \equiv \sigma_1 \pmod 2$$

erfüllen.

Der Grenzwerth l der früheren Summe X hatte sich als unabhängig von der speciellen Form f erwiesen. Infolgedessen muss der Grenzwerth L dieser Doppelsumme gleich $l \times \sum \frac{1}{l(f)}$ sein. Durch die hier erscheinende einfache Summe ist aber das Maass M unseres Genus dargestellt: man erhält demnach:

$$L = e_n \cdot \frac{(8\Delta R)_1}{2^{2+\delta+\mathfrak{r}}} \cdot \frac{1}{(8\Delta R)_n \cdot S_n} \cdot \frac{\sigma_1^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\Delta}} \cdot \prod_q A_q \,.\, M. \qquad (q-2,\,\delta,\,r)$$

Wir werden jetzt für L einen zweiten Ausdruck ableiten, und durch Vergleichung der beiden Ausdrücke werden wir dann die in 8. aufgestellten Formeln als richtig erkennen.

10. *Bestimmung desselben Grenzwerthes auf anderem Wege.*

Wir haben soeben den Grenzwerth L gefunden, indem wir uns die Summe S erst nach den einzelnen Formen f, und dann nach der numerischen Grösse der Zahlen $\frac{f(x_i)}{\sigma_1}$ geordnet dachten. Nun handelt es sich in S um lauter positive Glieder; wir müssen daher zu demselben Grenzwerth L gelangen, wenn wir die Summe S direct nach der Grösse der Zahlen $\frac{1}{\sigma_1} f(x_i) = m$ anordnen. Durch ein solches Arrangement entsteht für S zunächst ein Ausdruck von der Gestalt:

$$\rho \sum \frac{M(m)}{m^{\frac{n}{2}(1+\rho)}},$$

wo die Summation alle positiven Zahlen m betrifft, die zu $8\Delta R$ relativ prim sind und den Gleichungen: $C(m) = C(\alpha)$ genügen.

Für jede dieser Zahlen m hat die Grösse $M(m)$ folgende Bedeutung. Es bezeichne $m(f)$, wie oft eine bestimmte Form f die Zahl $\sigma_1 m$ mit Hilfe von Systemen x_i darzustellen vermag, welche keinen gemeinsamen Theiler > 1 haben, und ausserdem, falls $\varkappa > 1$, nicht alle Bedingungen (c) erfüllen. Dann ist:

$$M(m) = \sum \frac{m(f)}{t(f)},$$

wo die Summe sich über alle die Formen f erstreckt. Die Grösse $M(m)$ bildet also, wie wir uns nach *F. Q.*, p. 142 ausdrücken, das Maass für alle die definirten Darstellungen x_i der Zahl $\sigma_1 m$ durch die verschiedenen Formen f des Genus G.

Treten in der Zahl m im Ganzen μ ungerade Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ auf, so erscheint, nach *F. Q.*, p. 143, dieses Maass $M(m)$ als das 2^μ-fache von dem Maasse eines bestimmten positiven Genus $G(m)$ von Formen mit $n - 1$ Variabeln, welches enge mit dem Genus G zusammenhängt. Von den Sätzen, welche diesen Zusammenhang feststellen, wollen wir hier soviel anführen, als für die Bestimmung der Grösse $M(m)$ von Wichtigkeit ist (Vgl. *F. Q.*, art. XVIII).

(1). Es sei zunächst $n = 2$, in welchem Falle Δ und o_1 identisch sind. Je nach der Beschaffenheit der Zahl m bieten sich zwei Möglichkeiten dar.

Entweder ist für die Zahl m die quadratische Congruenz

$$-\Delta \equiv z^2 \pmod{\sigma_1 m}$$

nicht lösbar. In diesem Falle existirt auch das Genus $G(m)$ nicht, und man hat sein Maass gleich 0 zu setzen.

Oder diese Congruenz ist lösbar und besitzt 2^μ Lösungen $z \pmod{\sigma_1 m}$. Alsdann wird das Genus $G(m)$ von der einen Form $g = \xi^2$ gebildet und liefert das Maass 1.

In beiden Fällen kann man schreiben:

$$M(m) = \left\{1 + \left(\frac{-\Delta R^2}{p_1}\right)\right\}\left\{1 + \left(\frac{-\Delta R^2}{p_2}\right)\right\} \cdots \left\{1 + \left(\frac{-\Delta R^2}{p_\mu}\right)\right\}.$$

Der zweite Fall ereignet sich beispielsweise, wenn man für $\sigma_1 m$ den ersten Coefficienten einer der Formen f wählt, was man thun darf. Denn

nach Voraussetzung ist ein solcher Coefficient $\equiv \sigma_1 \alpha \pmod{\sigma_1 . 8 \Delta R}$. Man hat dann jedenfalls $\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = 1$, worin eine Bedingung für die Einheiten $C(m) = C(\alpha)$ liegt.

(2). Ist $n > 2$, so erkennt man zunächst, dass die Invarianten von $G(m)$ durch die Zahl $m\,[C(m) = C(\alpha)]$ und die Invarianten von G stets in solcher Weise ausgedrückt sind, dass das Genus $G(m)$ wirklich existirt. Wir haben bereits bemerkt, dass dieses Genus sich als positiv erweist. Man findet es auch primitiv. Seine Invarianten o und σ erlangen die Werthe:

$$\left(\begin{matrix} \sigma_2, & \sigma_3, & \ldots, & \sigma_{n-1} \\ \sigma_1 m . o_2, & o_3, & \ldots, & o_{n-1} \end{matrix}\right).$$

Es sei $\Delta^1 = \prod\limits_h^{2, n-1} o_h^{n-h}$ und $\mathfrak{D}^1 = \prod\limits_h^{2, n-1} o_h^{(h-1)(n-h)}$. Ferner fallen seine Charactere derart aus, dass für jede seiner Formen $g = \sum\limits_1^{n-1} c_{ik} \xi_i \xi_k$ die $\frac{n(n-1)}{2}$ Congruenzen:

$$(z) \qquad\qquad - o_1 c_{ik} \equiv z_i z_k \pmod{\sigma_1 m}$$

je 2^n Lösungen zulassen.

Wir nehmen nun an, die Formeln aus 8. seien bereits für den Fall $n - 1$ erwiesen, und wir wollen dieselben benutzen, um das Maass von $G(m)$ aufzustellen. Wir bilden zu dem Behufe für irgend eine Form g dieses Genus alle Grössen $g\{q\}$, und wir schreiben:

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q^{2\left[\frac{n}{2}\right]-2}}\right)}{g\{q\}} = E_q^1.$$

Für das Maass von $G(m)$ erhalten wir dann einen Ausdruck:

$$c_{n-1} . \frac{\sqrt{\mathfrak{D}^1} . \sigma_1^{\frac{n-2}{2}} m^{\frac{n-2}{2}}}{\sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_{n-1}} . E_2^1 E_3^1 E_5^1 \ldots E_q^1 \ldots,$$

wo c_{n-1} eine Constante bedeutet; und die Grösse $M(m)$ ergiebt sich gleich diesem Ausdrucke, multiplicirt mit 2^n. Es sind jetzt die Grössen E_q^1 zu ermitteln.

1) Ist zunächst q irgend eine ungerade Primzahl, die weder in ΔR, noch in m aufgeht, so kommt, nach 8., wenn $n \equiv 0 \pmod 2$:

$$E_q^1 = 1,$$

und wenn $n \equiv 1 \pmod 2$:

$$E_q^1 = \left[1 - \left(\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sigma_1 m \Delta^1}{q}\right) \frac{1}{q^{\frac{n-1}{2}}}\right]^{-1}.$$

In dem letzteren Falle hat man zugleich: $\left(\frac{\Delta^1}{q}\right) = \left(\frac{\Delta R^2}{q}\right)$. Bildet man das Product ΠE_q^1 über alle nicht in $2\Delta Rm$ aufgehenden Primzahlen q in ihrer natürlichen Reihenfolge, so kann man für dasselbe, je nachdem $n \equiv 0 \pmod 2$ oder $n \equiv 1 \pmod 2$ ist, entweder 1 oder die Summe $D_{\frac{n-1}{2}}\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sigma_1 m \Delta R^2\right]$ setzen.

2) Ist weiter $q = p$ eine der μ ungeraden Primzahlen aus m, und p^d die höchste Potenz dieser Primzahl, welche m theilt, so besitzt das Genus $G(m)$ Reste vom Typus:

$$g \equiv c\xi^2 + p^d(c_1\xi_1^2 + \ldots + c_{n-2}\xi_{n-2}^2) \pmod{p^t}, \qquad (t > d)$$

wo die Grössen $c, c_1, \ldots, c_{n-2}$ sämmtlich zu p prim sind. Aus den Congruenzen (z) erschliesst man das Bestehen einer Congruenz:

$$-\sigma_1 c \equiv z^2 \pmod{p^d};$$

man findet ferner:

$$cc_1 \ldots c_{n-2} \equiv \left(\frac{\sigma_1 m}{p^d}\right)^{n-2} \cdot \Delta^1 \pmod{p^{t-d}}.$$

Im Falle eines $n \equiv 0 \pmod 2$, wo zugleich $\left(\frac{\sigma_1 \Delta^1}{p}\right) = \left(\frac{\Delta}{p}\right)$, kommt also

$$\left(\frac{c_1 \ldots c_{n-2}}{p}\right) = \left(\frac{-\Delta}{p}\right).$$

Die Formeln aus 5. und 8. geben in diesem Falle:

$$E_p^1 = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}} c_1 \ldots c_{n-2}}{p}\right) \frac{1}{p^{\frac{n-2}{2}}}\right] = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \Delta R^2}{p}\right) \frac{1}{p^{\frac{n-2}{2}}}\right\},$$

dagegen, wenn $n \equiv 1 \pmod 2$:

$$E_p^1 = \frac{1}{2}.$$

3) Ist endlich q eine der Primzahlen aus $8\Delta R$, so besitzt das gegebene Genus G für einen jeden Modul q^t Hauptreste f_1 mit einem ersten Coefficienten $\sigma_1 m$. Aus diesen Hauptresten entspringen, nach den Sätzen aus *F. Q.*, art. XVIII, in einfacher Weise Hauptreste des Genus $G(m)$.

Bedeutet q zunächst eine der ungeraden Primzahlen ∂, r, so hat ein f_1 den Typus:

$$f_1 \equiv \sigma_1 m\xi^2 + \frac{o_1 f^{(1)}}{\sigma_1 m} \pmod{q^t}.$$

Der hier auftretende Rest $f^{(1)} \pmod{q^{t-\omega_1}}$ bildet dann einen Rest des Genus $G(m)$.

Ist $q = 2$, so müssen die Fälle $\sigma_1 = 1$ und $\sigma_1 = 2$ unterschieden werden.

Im ersteren Falle hat ein f_1 den Typus:

$$f_1 \equiv m\xi^2 + \frac{o_1 f^{(1)}}{m} \pmod{2^t},$$

wo $f^{(1)}$ einen in Bezug auf 2 primitiven Rest vorstellt, welcher im Falle $o_1 \equiv 1 \pmod 2$ eine erste Invariante σ gleich 1 liefert. In diesem $f^{(1)} \pmod{2^{t-\omega_1}}$ finden wir einen Rest von $G(m)$.

Im zweiten Falle ($\sigma_1 = 2$) hat f_1 den Typus:

$$f_1 \equiv 2(m\xi^2 + A\xi\tilde{\xi} + \tilde{m}\tilde{\xi}^2) + \frac{o_1 o_2 f^{(2)}}{m} \pmod{2^t},$$

wo A ungerade und $f^{(2)}$ primitiv in Bezug auf 2 ist, und man gewinnt in

$$f^{(1)} \equiv \frac{(4m\tilde{m} - A^2)}{o_1}\eta^2 + 2o_2 f^{(2)} \pmod{2^{t+1}}$$

einen Rest des Genus $G(m)$.

In allen Fällen ergiebt sich nun, nach 5. und 6., wenn t gross genug gewählt ist, die Beziehung:

$$f\{q\} = A_q \cdot f^{(1)}\{q\},$$

wobei A_q mit der in 9. auf diese Weise bezeichneten Grösse identisch ist.

Für die Ausdrücke E_q und E_q^1 folgt hieraus, wenn $n \equiv 0 \pmod 2$ und > 2, die Gleichung:

$$E_q^1 = A_q E_q,$$

und wenn $n \equiv 1 \pmod 2$:

$$E_q^1 = \frac{A_q E_q}{1 - \frac{1}{q^{n-1}}}.$$

Im Falle $n = 2$ findet man in ähnlicher Weise: $f\{q\} = A_q$, also, da hier $E_q = \frac{1}{f\{q\}}$ ist: $A_q E_q = 1$.

Fassen wir alles Vorhergehende zusammen, so können wir die Grösse $M(m)$, wenn $n > 2$ ist, in folgender Form schreiben:

$$\mathfrak{c}_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{\mathfrak{D}^1} \cdot \sigma_1^{\frac{n-2}{2}} m^{\frac{n-2}{2}}}{\sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_{n-1}} \cdot \prod_q A_q E_q \cdot (m), \qquad (q = 2, \partial, r)$$

wobei im Falle eines geraden n:

$$(m) = \prod_p \left| 1 + \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \Delta R^2}{p}\right) \frac{1}{p^{\frac{n-2}{2}}} \right|, \qquad (p = p_1, p_2, \ldots, p_\mu)$$

und im Falle eines ungeraden n:

$$(m) = \frac{1}{(8 \Delta R)_{n-1}} \cdot D_{\frac{n-1}{2}} \left[(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sigma_1 m \Delta R^2\right].$$

Dieser Ausdruck bleibt nun auch für $n = 2$ gültig, wenn $\mathfrak{c}_1 = 1$ genommen wird.

Wir vergleichen jetzt den früher gefundenen Ausdruck von L mit dem Grenzwerthe $\operatorname{Lim}\left(\rho \sum \frac{M(m)}{m^{\frac{n}{2}(1+\rho)}}\right)$. Dadurch erhalten wir eine Beziehung für das Maass M des gegebenen Genus. In dieselbe setzen wir

$$M = \mathfrak{c}_n \cdot \frac{\sqrt{\mathfrak{D}}}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}} \cdot \prod_q E_q \cdot D_R \cdot M_0, \qquad (q = 2, \partial, r)$$

wo $D_R = 1$ sei für ein ungerades n, und gleich $D_{\frac{n}{2}}\left[(-1)^{\frac{n}{2}} \Delta R^2\right]$ für ein gerades n, und wo $\mathfrak{D} = \Delta \cdot \mathfrak{D}^1$ und

$$\mathfrak{c}_n = 2 \frac{\mathfrak{c}_1}{e_2} (n = 2); = \frac{\mathfrak{c}_{n-1}}{e_n} \cdot \frac{2}{n} (n \equiv 0, \bmod 2;\ n > 2); = \frac{\mathfrak{c}_{n-1}}{e_n} \cdot \frac{2}{n} \cdot S_{n-1} (n \equiv 1, \bmod 2)$$

die Grössen aus 8. bedeuten sollen. Die Grösse M_0 erweist sich dann als unabhängig von der Zahl R, und es wird $M_0 = 1$ sein müssen, damit die in 8. für M aufgestellten Ausdrücke in Wirklichkeit gelten.

Schreibt man noch $\frac{2}{n}\rho$ für ρ, so lauten die Endformeln: wenn $n = 2$,

$$(1)\qquad 2\cdot\frac{(8\Delta R)_1}{2^{2+\mathfrak{d}+\mathfrak{r}}}\cdot\frac{D_1(-\Delta R^2)}{(8\Delta R)_2\cdot S_2}\cdot M_0 = \operatorname{Lim}\rho\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}\prod_p\left[1+\left(\frac{-\Delta R^2}{p}\right)\right];$$

wenn $n \equiv 0 \pmod 2$ und > 2,

$$(2)\qquad \frac{(8\Delta R)_1}{2^{2+\mathfrak{d}+\mathfrak{r}}}\cdot\frac{D_{\frac{n}{2}}\left[(-1)^{\frac{n}{2}}\Delta R^2\right]}{(8\Delta R)_n\cdot S_n}\cdot M_0$$

$$= \operatorname{Lim}\left\{\rho\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}\prod_p\left[1+\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\Delta R^2}{p}\right)\frac{1}{p^{\frac{n-2}{2}}}\right]\right\};$$

wenn $n \equiv 1 \pmod 2$,

$$(3)\qquad \frac{(8\Delta R)_1}{2^{2+\mathfrak{d}+\mathfrak{r}}}\cdot\frac{(8\Delta R)_{n-1}\cdot S_{n-1}}{(8\Delta R)_n\cdot S_n}\cdot M_0 = \operatorname{Lim}\left\{\rho\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}D_{\frac{n-1}{2}}\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sigma_1 m\Delta R^2\right]\right\}.$$

Dabei durchläuft m, wie erinnert werden mag, alle positiven und zu $8\Delta R$ relativ primen ganzen Zahlen, für welche die $2+\mathfrak{d}+\mathfrak{r}$ Einheiten

$$C(m)\qquad (-1)^{\frac{m-1}{2}},\qquad \left(\frac{2}{m}\right),\qquad \left(\frac{m}{\mathfrak{d}}\right),\qquad \left(\frac{m}{\mathfrak{r}}\right)$$

gewisse feste Werthe annehmen, die für ein $n = 2$ jedenfalls der Bedingung $\left(\frac{-\Delta R^2}{m}\right) = 1$ genügen.

Diese Zahlen m bilden offenbar die Individuen von $(8\Delta R)''\cdot\frac{(8\Delta R)_1}{2^{2+\mathfrak{d}+\mathfrak{r}}}$ arithmetischen Progressionen $8\Delta R\cdot U + m_0$, $(U = 0, 1, \ldots, \infty)$ von der Differenz $8\Delta R$. Infolgedessen muss nach Dirichlet die Gleichung bestehen:

$$(4)\qquad \frac{(8\Delta R)_1}{2^{2+\mathfrak{d}+\mathfrak{r}}} = \operatorname{Lim}\left(\rho\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}\right).$$

Von derselben werden wir sofort Gebrauch machen, um in allen Fällen das Resultat $M_0 = 1$ abzuleiten.

11. *Beweis, dass $M_0 = 1$ ist.*

Wir schicken die folgende Betrachtung voraus:

Es sei eine ganze positive oder negative Zahl N theilbar durch alle ungeraden Primzahlen, die unter einer gewissen Grenze $G + 1$ liegen; ferner soll p die sämmtlichen Primzahlen irgend einer zu $2N$ relativ primen Zahl m durchlaufen; endlich sei $\nu > 1$ und $\gamma = \frac{1}{(\nu - 1)G^{\nu-1}}$; dann gelten die Ungleichungen:

$$1 - \gamma < D_\nu(N) < 1 + \gamma; \qquad 1 < (2N)_\nu \,.\, S_\nu < 1 + \gamma;$$

$$1 - \gamma < \prod\left[1 + \left(\frac{N}{p}\right)\frac{1}{p^\nu}\right] = \Pi_\nu < 1 + \gamma.$$

In der That, man erhält zunächst

$$D_\nu(N) = \sum \left(\frac{N}{m}\right)\frac{1}{m^\nu},$$

wo die Summation sich auf alle zu $2N$ relativ primen und positiven Zahlen m bezieht. Die kleinste dieser Zahlen m, welche von 1 verschieden ist, besitzt mindestens den Werth $G + 1$. Die vorstehende Summe liegt daher zwischen den beiden Grössen:

$$1 \pm \left(\frac{1}{(G+1)^\nu} + \frac{1}{(G+2)^\nu} + \ldots\right).$$

Da nun

$$\frac{1}{(G+k)^\nu} < \int\limits_{G+k-1}^{G+k} \frac{dx}{x^\nu},$$

so folgt um so mehr:

$$1 - \int\limits_G^\infty \frac{dx}{x^\nu} < D_\nu(N) < 1 + \int\limits_G^\infty \frac{dx}{x^\nu}.$$

In derselben Weise ergeben sich die Ungleichungen für die Grösse $(2N)_\nu \,.\, S_\nu$, welche den Werth der über alle Zahlen m erstreckten Summe $\sum \frac{1}{m^\nu}$ ausdrückt.

Was endlich das Product Π_ν anlangt, so kommt zunächst

$$\Pi_\nu \leqq \Pi(1 + p^{-\nu}) < 1 + [(G+1)^{-\nu} + (G+2)^{-\nu} + \ldots] < 1 + \gamma,$$

und dann

$$\Pi_\nu \geqq \Pi(1 - p^{-\nu}) > \frac{1}{1 + [(G+1)^{-\nu} + (G+2)^{-\nu} + \ldots]} > \frac{1}{1+\gamma} > 1 - \gamma.$$

Auf Grund der vorstehenden Ungleichungen können wir jetzt in allen Fällen, wo $n > 4$ ist, die Beziehung $M_0 = 1$ nachweisen.

Wir wählen einfach die Zahl R derart, dass in ΔR sämmtliche ungeraden Primzahlen auftreten, die kleiner als eine Zahl $G + 1$ sind. Unsere Ungleichungen liefern uns dann, wenn n ungerade und > 3 ist, für alle Grössen:

$$D_{\frac{n-1}{2}}\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sigma_1 m \Delta R^2\right], \qquad (8\Delta R)_n \,.\, S_n, \qquad \frac{1}{(8\Delta R)_{n-1} \,.\, S_{n-1}},$$

und wenn n gerade und > 4 ist, für alle Grössen:

$$\Pi\left[1 + \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \Delta R^2}{p}\right) \frac{1}{p^{\frac{n-2}{2}}}\right], \qquad (8\Delta R)_n \,.\, S_n, \qquad \frac{1}{D_{\frac{n}{2}}\left[(-1)^{\frac{n}{2}} \Delta R^2\right]}$$

einmal obere und dann untere Grenzen. Indem wir erst diese oberen und dann diese unteren Grenzen einsetzen, und jedesmal die hervorgehende Ungleichung durch die Gleichung (4) dividiren, bekommen wir, wenn $n \equiv 1 \pmod 2$ und > 3:

$$\frac{1 - \gamma_{\frac{n-3}{2}}}{1 + \gamma_{n-2}} < M_0 < (1 + \gamma_{\frac{n-3}{2}})(1 + \gamma_{n-1}),$$

und wenn $n \equiv 0 \pmod 2$ und > 4:

$$\frac{1 - \gamma_{\frac{n-4}{2}}}{1 + \gamma_{\frac{n-2}{2}}} < M_0 < \frac{(1 + \gamma_{\frac{n-4}{2}})(1 + \gamma_{n-1})}{1 - \gamma_{\frac{n-2}{2}}},$$

wobei γ_h für $\frac{1}{hG^h}$ gesetzt ist. Lassen wir jetzt die Zahl G in's Unendliche wachsen, so folgt in der That: $M_0 = 1$.

Es bleibt uns noch übrig, die Fälle $n = 2, 3, 4$ zu untersuchen.

Ist $n = 2$, so nehme man $R = 1$, und betrachte zu gleicher Zeit alle die Grenzwerthe $L(m)$, welche die rechte Seite der Gleichung (1) darstellt, wenn man den $2 + \mathfrak{d}$ Einheiten $C(m)$ alle die Werthsysteme beilegt, die der Bedingung $\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = 1$ genügen. Man bilde aus diesen $2^{1+\mathfrak{d}}$ Grenzwerthen ebensoviele lineare Combinationen: $\Sigma c(m) . L(m) = L_c$; $c(m)$ bedeute hier ein beliebiges Glied des über alle Einheiten $C(m)$ erstreckten Productes $\Pi[1 + C(m)]$; von je zwei Einheiten $c(m)$, die ein Product gleich $\left(\frac{-\Delta}{m}\right)$ geben, soll aber immer nur eine beibehalten werden. Aus den Summen L_c folgen umgekehrt die Grössen $L(m)$ mit Hilfe der Gleichungen $2^{1+\mathfrak{d}} . L(m) = \Sigma_c c(m) . L_c$. Die Grenzwerthe L_c sind von Dirichlet angegeben. Unter ihnen ist nur einer von Null verschieden, nämlich derjenige, welcher zu $c = 1 = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)$ gehört; dieser besitzt einen Ausdruck, aus welchem sofort $M_0 = 1$ hervorgeht.

In den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ gebe ich für die Relation $M_0 = 1$ einen Beweis, welcher sich auf die Sätze aus der Anmerkung zu 9. stützt. Uebrigens liesse sich für diese Fälle noch dieselbe Methode verwerthen, welche in den Fällen $n > 4$ angewandt wurde. Für $n = 3$ sehe man auch: Smith, *On the Orders and Genera of Ternary Quadratic Forms*, artt. 13—21 (Phil. Trans. CLVII, 1867) und: *F. Q.*, pp. 156—159; für $n = 4$: *F. Q.*, pp. 162—163, und: Smith, *Sur la représentation des nombres par une somme de cinq carrés* (Mém. prés. T. XXIX).

Ist $n = 3$, so constatire man zunächst, dass dem speciellen Genus G von der Ordnung:

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\Delta = 1)$$

welches die Formen von der Determinante 1 enthält, ein $M_0 = 1$, d. i. ein $M = \frac{1}{24}$ zukommt. Bekanntlich bilden alle Formen von G eine ein-

zige Classe, welche durch $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ repräsentirt wird,[1] und dieses f lässt in der That genau 24 Transformationen von der Determinante 1 in sich selbst zu. Die Anwendung der Gleichung (3) auf G liefert:

$$\text{(R)} \qquad \frac{(2R)_1}{2^{2+r}} \cdot \frac{(2R)_2 \,.\, S_2}{(2R)_3 \,.\, S_3} = \operatorname{Lim} \left| \rho \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} D_1(-mR^2) \right|,$$

wo m alle positiven und zu $2R$ relativ primen Zahlen mit festen Einheiten:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{m}\right), \quad \left(\frac{m}{r_1}\right), \quad \left(\frac{m}{r_2}\right), \ldots, \left(\frac{m}{r_r}\right)$$

zu durchlaufen hat. Dabei ist nach 9. Anm. die Einheit $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ stets gleich $+1$ zu nehmen, während die übrigen Einheiten ganz nach Belieben gewählt werden dürfen.

Die vorstehende Formel benutzen wir, um für ein beliebiges ternäres Genus G von einer Ordnung

$$\begin{pmatrix} \sigma_1, & \sigma_2 \\ o_1, & o_2 \end{pmatrix} \qquad (\Delta = \sigma_1^2 o_2)$$

die Relation $M_0 = 1$ abzuleiten. Nach (3) genügt die Grösse M_0 eines solchen Genus jedenfalls einer Gleichung

$$(\Delta) \qquad \frac{(2\Delta)_1}{2^{2+\delta}} \cdot \frac{(2\Delta)_2 \,.\, S_2}{(2\Delta)_3 \,.\, S_3} \,.\, M_0 = \operatorname{Lim} \left| \rho \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} D_1(-\sigma_1 \Delta m) \right| = \{m\},$$

wo m alle positiven und zu 2Δ relativ primen Zahlen mit bestimmten festen Einheiten

$$C(m) \qquad (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{m}\right), \quad \left(\frac{m}{\delta_1}\right), \quad \left(\frac{m}{\delta_2}\right), \ldots, \left(\frac{m}{\delta_\delta}\right)$$

durchläuft.

Wir betrachten zuerst den Fall, wo $\sigma_1 o_2$ und $\sigma_2 o_1$ beide vollständige Quadrate sind.

Das Genus G werde durch eine characteristische Form f repräsentirt. Der erste Coefficient von f heisse $\sigma_1 \varphi_1$, und es sei $\sigma_2 \varphi_2$ der erste

---

[1] Vgl. z. B. Dirichlet in Crelle's Journal, Bd. 40, S. 228.

Coefficient der zu f adjungirten Form. Die Zahlen φ_1 und φ_2 sind dann prim zu einander, und es gelten zwei Congruenzen

$$-o_1\sigma_2\varphi_2 \equiv X_1^2 \pmod{\sigma_1^2\varphi_1}$$

$$-o_2\sigma_1\varphi_1 \equiv X_2^2 \pmod{\sigma_2^2\varphi_2}.$$

Dieselben geben

$$-\left(\frac{-\varphi_2}{\varphi_1}\right)\cdot\left(\frac{-\varphi_1}{\varphi_2}\right) = (-1)^{\frac{\varphi_1+1}{2}\cdot\frac{\varphi_2+1}{2}} = -1,$$

also

$$\varphi_1 \equiv 1, \qquad \varphi_2 \equiv 1 \pmod{4},$$

was nur mit $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$ verträglich ist. Denn hätte man etwa $\sigma_2 = 2$, so würde die zweite Congruenz zugleich $-\varphi_1 \equiv 1 \pmod{4}$ liefern. Nach 7. besitzt nun unser Genus den Hauptrest $\varphi_1\xi_1^2 + \frac{o_1\varphi_2}{\varphi_1}\xi_2^2 + \frac{o_1 o_2}{\varphi_2}\xi_3^2 \pmod{4}$. Derselbe zeigt, dass in (Δ) die Einheit $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ allein gleich $+1$ genommen werden darf. Setzt man $\sigma_1\Delta = 2^{2h}.R^2 (R \equiv 1, \bmod 2)$, so kann daher der Grenzwerth $\{m\}$ nach der Formel (R) bestimmt werden, und man findet $M_0 = 1$.

Zweitens sei eine der Zahlen $\sigma_1 o_2$ und $\sigma_2 o_1$ kein vollständiges Quadrat.

Das Maass des Genus G stimmt, wie wir wissen, mit dem Maasse des adjungirten Genus von der Ordnung

$$\begin{pmatrix}\sigma_2, & \sigma_1\\ o_2, & o_1\end{pmatrix}$$

überein; ebenso liefern diese beiden Genera gleiche Grössen $f\{q\}$; sie müssen also auch dasselbe M_0 ergeben. Wir brauchen daher nur eines dieser Genera zu untersuchen, und können annehmen, es sei $\sigma_1 o_2$, also auch $\sigma_1\Delta$ kein vollständiges Quadrat.

Aus $\sigma_1\Delta$ gehe durch Division mit einer möglichst hohen Potenz von 4 die Zahl d hervor. Wir betrachten irgend ein Genus φ_1 der Ordnung

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\ 1, & d\end{pmatrix};$$

denken uns aber im Falle $d \equiv 1 \pmod{4}$, (was dann sicher gestattet ist), die Charactere $\left(\frac{\varphi_2}{\partial}\right)$ dieses Genus so ausgesucht, dass die Einheit

$\delta = (-1)^{\frac{d+1}{2}} \cdot \left(\frac{\varphi_2}{d}\right) = (-1)^{\frac{\varphi_1 d+1}{2} \cdot \frac{\varphi_2+1}{2}}$ gleich $+1$ wird. Die zu φ_1 gehörige Grösse M_0 lässt sich ebenfalls durch einen der Grenzwerthe $\{m\}$ darstellen; und zwar ist hier, nach den Sätzen aus 9. Anm., ein jeder der $2^{2+\mathfrak{d}}$ Grenzwerthe $\{m\}$ in gleicher Weise verwendbar. Alle die Grenzwerthe $\{m\}$ müssen demnach untereinander gleich sein.

Bilden wir jetzt die Formel (Δ) für das zu φ_1 adjungirte Genus φ_2 der Ordnung

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ d, & 1 \end{pmatrix},$$

so ergeben sich die Grenzwerthe $\{m\}$ gleich gewissen Grenzwerthen

$$\operatorname{Lim}\left\{\rho \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} D_1(-d^2 m)\right\},$$

wo m wie vorher Reihen von positiven Zahlen mit festen Characteren $C(m) = \pm 1$ zu durchlaufen hat. Hier ist für die Einheit $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$, nach 9. Anm., stets der Werth $+1$ zulässig. Wenn man $d = R$, resp. $= 2R$ setzt, kann man also für den vorstehenden Grenzwerth die Formel (R) benutzen, und man gelangt zu $M_0 = 1$.

Ist endlich $n = 4$, so haben wir einen Grenzwerth

$$\operatorname{Lim}\left[\rho \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} \prod_p \left\{1 + \left(\frac{-\Delta}{p}\right)\frac{1}{p}\right\}\right] = \{m\}$$

zu ermitteln, wo m alle positiven und zu 2Δ relativ primen Zahlen mit festen Einheiten

$$C(m) \qquad (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{m}\right), \quad \left(\frac{m}{\mathfrak{d}_1}\right), \quad \left(\frac{m}{\mathfrak{d}_2}\right), \ldots, \left(\frac{m}{\mathfrak{d}_\mathfrak{d}}\right)$$

durchläuft. Wir bilden aus Δ durch Division mit einer möglichst hohen Potenz von 4 eine Zahl Δ_0. Die Grösse M_0 für irgend ein Genus der Ordnung

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & \Delta_0 \end{pmatrix}$$

hängt dann gleichfalls von irgend einem Grenzwerthe $\{m\}$ ab. Für ein

solches Genus unterliegen aber, nach den Sätzen aus 9. Anm., die Einheiten $C(m)$ durchaus keiner Beschränkung. Alle die $2^{2+\mathfrak{b}}$ Grenzwerthe $\{m\}$ müssen also untereinander gleich sein, und wir können sie gleich dem $2^{2+\mathfrak{b}\,\text{ten}}$ Theile ihrer Summe setzen. Diese Summe wird durch einen ähnlichen Grenzwerth gebildet, wo m alle möglichen positiven und zu 2Δ relativ primen Zahlen durchläuft. Dieser letzte Grenzwerth gestattet nach *F. Q.*, p. 150 und 162 eine Transformation in:

$$\operatorname{Lim}\left(\rho\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}\cdot\frac{\sum\left(\frac{\Delta}{m}\right)m^{-2-\rho}}{\sum m^{-4-2\rho}}\right)=(2\Delta)_1\cdot\frac{D_2(\Delta)}{(2\Delta)_4\,.\,S_4},$$

welche dann unmittelbar zu $M_0 = 1$ führt.

Von den verschiedenen Darstellungen, deren das Maass eines Genus fähig ist, erscheint als die natürlichste die hier gegebene mit Hilfe eines unendlichen Productes, in welchem einer jeden Primzahl ein bestimmter Factor entspricht.[1] Ihre Bedeutung reicht über das specielle Gebiet der quadratischen Formen hinaus: es zeigt diese Darstellung, dass zur Lösung arithmetischer Probleme über Formenanzahlen ein Studium jener wichtigen Gruppenbildungen erforderlich ist, auf welche Herr Camille Jordan in N° 302 des *Traité des Substitutions* aufmerksam gemacht hat.

Ausdrücke für das Maass eines positiven Genus quadratischer Formen von n Variabeln sind zuerst von Henry J. Stephen Smith in der Note *On the Orders and Genera of Quadratic Forms containing more than three Indeterminates*, (Roy. Soc. Proc. XVI, 1868, pp. 197—208), mitgetheilt. Die Formeln von Smith sind ähnlich unseren Formeln (2) in 8., erschöpfen aber nicht alle Fälle; sie geben im Wesentlichen die Werthe der von uns E_q genannten Factoren für ungerade Primzahlen q, doch für die Primzahl 2 nur in den weniger verwickelten Fällen, wo das Genus eine ungerade Determinante besitzt.

In einem folgenden Aufsatze beabsichtige ich verschiedene Anwendungen der hier gefundenen Resultate auseinanderzusetzen.

[1] Ich habe auf diese Darstellung im 99. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik hingewiesen.

SUR L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE

ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

§ 1. *Introduction.*

Quelles sont les figures d'équilibre relatif que peut affecter une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent conformément à la loi de NEWTON et qui est animée autour d'un certain axe d'un mouvement de rotation uniforme?

Quelles sont les conditions de stabilité de cet équilibre?

Tels sont les deux problèmes qui forment l'objet de ce mémoire.

On en connaît depuis longtemps deux solutions: l'ellipsoïde de révolution et l'ellipsoïde à trois axes inégaux de JACOBI. Je me propose d'établir qu'il y en a une infinité d'autres.

Mais je vais avant d'aller plus loin signaler un certain nombre de résultats que l'on trouve dans le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. TAIT et THOMSON, 2me édition, 778. Sir WILLIAM THOMSON énonce la plupart de ces propositions sans aucune démonstration; pour quelques unes d'entre elles, il renvoie à des mémoires plus étendus insérés aux Philosophical Transactions.

Voici ces résultats, qui doivent nous servir de point de départ.

(*a*). L'ellipsoïde de révolution aplati est une figure d'équilibre toujours stable, si on impose à la masse fluide la condition d'affecter la forme d'un ellipsoïde de révolution.

(*b*). Si nous imposons à notre masse la condition d'être de révolution, mais non plus celle d'être ellipsoïdale, on trouve, si le moment de la quantité de mouvement est assez grand, deux figures d'équilibre: une figure annulaire qui est stable et une figure ellipsoïdale qui est instable. (Nous verrons dans la suite de ce mémoire qu'il y en a une infinité d'autres parmi lesquelles il y en a de stables grâce à la condition imposée à la masse de rester de révolution.)

(*c*). Il existe également des figures d'équilibre, probablement instables, où la masse se subdivise en plusieurs anneaux concentriques.

(*d*). La figure annulaire d'équilibre est stable si l'on impose à la masse la condition de rester de révolution, et probablement instable si l'on supprime cette liaison.

(*e*). Si l'on impose à la masse la condition d'être ellipsoïdale, mais non d'être de révolution, l'ellipsoïde de révolution est stable, si l'excentricité est inférieure à 0,8127 et instable dans le cas contraire. (Nous verrons dans la suite de ce mémoire que les conditions de stabilité restent les mêmes si l'on ne s'impose aucune liaison.)

L'ellipsoïde de Jacobi est toujours stable, si l'on impose à la masse la condition d'être ellipsoïdale.

(*f* et *g*). L'ellipsoïde de Jacobi, si l'on ne s'impose aucune condition est certainement instable dans certains cas, bien qu'il soit probablement stable dans d'autres. (Nous démontrerons dans la suite de ce mémoire qu'il y a effectivement des ellipsoïdes de Jacobi qui sont stables.)

Une autre forme d'équilibre stable, si le moment de la quantité de mouvement est assez grand, sera celle où la masse se subdivise en deux corps isolés, comparables à une planète et un satellite dont les vitesses de rotation seraient égales entre elles et à celles de révolution.

(*h*). Il existe également des configurations où le fluide se subdivise en plus de deux masses détachées, mais elles sont instables.

(*i*). Il subsiste une importante lacune entre le plus grand moment de la quantité de mouvement qui correspond à un ellipsoïde de Jacobi stable et le plus petit moment qui correspond à l'équilibre stable de deux masses isolées. Il y aurait intérêt à combler cette lacune par des figures intermédiaires. (J'ai fait à la fin de ce mémoire une tentative dans ce sens, mais je n'ai réussi pour ainsi dire qu'à amorcer le problème et à indiquer la voie à suivre.)

(j). Si l'énergie avec un moment donné est un minimum ou un maximum, l'équilibre est stable, pourvu que le liquide soit parfaitement dépourvu de viscosité. Il est probable qu'il est instable si l'énergie est un »minimax» mais cela n'a pas encore été démontré. (Nous verrons dans la suite de ce mémoire un exemple où l'équilibre est stable à la condition que la fluide soit *absolument* dépourvu de viscosité et bien que l'énergie soit un »minimax».)

(k). Si le liquide est visqueux, et si peu qu'il le soit, l'équilibre sera certainement instable si l'énergie est un maximum ou un minimax, et certainement stable si elle est un minimum.

Je donnerai dans la suite de ce travail la démonstration de quelques unes des propositions que sir WILLIAM THOMSON avait seulement énoncées, et je les compléterai même sur divers points, comme je l'ai déjà indiqué dans les parenthèses que j'ai intercalées dans le précédent exposé.

Je démontrerai aussi l'existence de figures d'équilibre tout à fait différentes de celles dont parlent MM. TAIT et THOMSON.

J'ai déjà donné dans le Bulletin Astronomique une courte note où j'étudie plus en détail l'anneau simple ou multiple dont il est question dans le passage cité plus haut [(b), (c) et (d)].

Dans cette étude, je me suis rencontré avec M^me^ KOWALEVSKI qui avait déjà employé les mêmes procédés d'analyse dans un mémoire sur l'anneau de Saturne, qui avait été communiqué en 1874 à l'Université de Göttingen et qui n'a été imprimé qu'en 1885 dans les Astronomische Nachrichten.

§ 2. *Equilibre de bifurcation.*

Considérons d'abord le cas où il s'agit d'un équilibre absolu et d'un système dont la position est définie par n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons qu'il y ait une fonction des forces $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de façon que l'équilibre ait lieu quand toutes les dérivées de cette fonction s'annulent et qu'il soit stable quand cette fonction est maximum. Je supposerai qu'outre les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il entre dans la fonction F un paramètre variable y, de telle sorte que les valeurs des x qui correspondent à l'équilibre dépendent de ce paramètre y.

Supposons que y ait une valeur déterminée; les équations d'équilibre:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0 \tag{1}$$

auront un certain nombre de racines; quand on fera varier y, (si F est une fonction holomorphe des x et de y, ce que nous supposerons d'abord) ces racines varieront d'une manière continue. Nous aurons ainsi un certain nombre de séries linéaires de racines:

$$x_1 = \varphi_{11}(y),\ x_2 = \varphi_{12}(y),\ \ldots,\ x_n = \varphi_{1n}(y)$$
$$x_1 = \varphi_{21}(y),\ x_2 = \varphi_{22}(y),\ \ldots,\ x_n = \varphi_{2n}(y)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1 = \varphi_{k1}(y),\ x_2 = \varphi_{k2}(y),\ \ldots,\ x_n = \varphi_{kn}(y).$$

Dans chacune de ces séries linéaires, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions continues du paramètre y. Pour certaines valeurs de y, deux ou plusieurs racines peuvent se confondre. Quelle est la condition pour qu'il en soit ainsi?

Soit Δ le déterminant fonctionnel des n dérivées $\frac{dF}{dx_1}, \frac{dF}{dx_2}, \ldots, \frac{dF}{dx_n}$ par rapport aux n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ou, en d'autres termes, le hessien de la fonction F par rapport à ces n variables. La condition nécessaire et suffisante pour que deux ou plusieurs racines se confondent, c'est que Δ soit nul.

Supposons que pour une certaine valeur α de y, pour laquelle Δ s'annule, p racines des équations (1) viennent à se confondre, ou en d'autres termes, qu'une même racine appartienne à la fois à p séries linéaires. Parmi les p racines qui appartiennent à ces p séries linéaires, il y en aura $2q$ qui seront imaginaires et $p - 2q$ qui seront réelles pour $y < \alpha$; il y en aura d'autre part $2r$ qui seront imaginaires et $p - 2r$ qui seront réelles pour $y > \alpha$.

Si $p = 2$, $q = r = 0$, les racines des deux séries linéaires sont réelles, et on a ainsi une racine qui appartient à la fois à deux séries réelles.

Si $p = 2$, $q = 0$, $r = 1$, les racines sont toutes deux réelles pour $y < \alpha$, et toutes deux imaginaires pour $y > \alpha$. Quand y en croissant

atteint et dépasse la valeur α, deux racines réelles se confondent, puis deviennent imaginaires.

Si $p = 3$, $q = r = 1$, il y a pour $y < \alpha$ et pour $y > \alpha$, une racine réelle et deux imaginaires, de sorte que la racine qui correspond à $y = \alpha$ n'appartient qu'à une seule série réelle. Mais il est aisé de voir dans ce cas que Δ s'annule sans changer de signe.

Il est inutile de citer d'autres cas particuliers, j'arrive tout de suite au résultat général que j'ai en vue. Soit:

$$x_1 = \varphi_1(y),\ x_2 = \varphi_2(y),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(y) \tag{2}$$

une série linéaire de racines; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions continues et uniformes de y. Supposons de plus que pour les valeurs voisines de α, qu'elles soient inférieures ou supérieures à cette quantité, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ restent réelles. Si l'on substitue dans

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cette fonction Δ ne dépendra plus que de y. Je suppose que pour $y = \alpha$, la fonction $\Delta(y)$ change de signe. Je dis alors que la racine

$$\varphi_1(\alpha),\ \varphi_2(\alpha),\ \ldots,\ \varphi_n(\alpha)$$

appartiendra non seulement à la série (2) mais à une autre série linéaire de racines réelles.

Avant de démontrer ce résultat général, donnons quelques exemples. Soit:

$$F = Ax_1^2 + \frac{1}{3}x_2^3 - y^2x_2 - \alpha y x_2.$$

Il vient pour les équations d'équilibre:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \pm\sqrt{y^2 + \alpha y}$$

d'où

$$\Delta = 4Ax_2 = \pm 4A\sqrt{y^2 + \alpha y}.$$

Pour les valeurs de y comprises entre 0 et $-\alpha$ les valeurs de x_2 sont imaginaires; elles sont réelles pour les autres valeurs de y. Pour $y = 0$,

et pour $y = -\alpha$, les racines passent du réel à l'imaginaire ou réciproquement; c'est aussi pour ces mêmes valeurs que Δ s'annule.

Faisons en particulier: $\alpha = 0$; il y aura deux séries linéaires de positions d'équilibre:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = y \tag{2}$$

et

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -y. \tag{3}$$

Considérons la première de ces séries; pour chacune des positions qui lui appartiennent on aura

$$\Delta = 4Ay.$$

Quand y variera depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, les valeurs de x_1 et de x_2 resteront réelles, mais quand y passera par 0, Δ changera de signe. Donc en vertu du principe que je viens d'énoncer, la position d'équilibre qui correspond à la valeur $y = 0$, c'est à dire:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

appartiendra non seulement à la série (2), mais encore à une autre série linéaire de positions d'équilibre. Il est aisé en effet de constater qu'elle appartient également à la série (3).

Soit maintenant:

$$F = Ax_1^2 + \frac{x_2^4}{4} - y^3 x_2.$$

Les équations d'équilibre deviennent

$$x_1 = 0, \qquad x_2^3 = y^3.$$

Il n'y a qu'une série de positions d'équilibre *réelles*, à savoir:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = y$$

et on voit que ces positions restent réelles quand y varie de $-\infty$ à $+\infty$. Aucune de ces positions ne peut donc appartenir à plusieurs

séries de positions d'équilibre réelles comme cela avait lieu tout à l'heure. Cependant

$$\Delta = 6Ay^2$$

s'annule pour $y = 0$, *mais sans changer de signe.*

Pour démontrer ce principe que je viens d'énoncer et d'illustrer par quelques exemples, je supposerai que $n = 1$, de telle façon que je n'aie plus que deux variables: x qui définit la position du système et le paramètre y. On aura:

$$\Delta = \frac{d^2F}{dx^2}$$

et l'équation d'équilibre sera:

$$\frac{dF}{dx} = F'(x, y) = 0.$$

L'équation $F'(x, y) = 0$ pourra être considérée comme représentant une courbe plane C. Soit:

$$x = \varphi(y)$$

une fonction uniforme, réelle, finie et continue de y qui satisfasse à l'équation:

$$F'[\varphi(y), y] = 0.$$

L'équation $x = \varphi(y)$ représentera alors une des branches B de la courbe C. Soit $M(x = \alpha, y = \beta)$ un des points de cette branche de courbe. Supposons que lorsqu'on suit cette branche de courbe, on voie Δ changer de signe au moment où on franchit le point M. Je dis qu'il passera par le point M une autre branche de la courbe C.

Soit en effet P le point de la branche B qui a pour ordonnée $y = \beta - \varepsilon$ et Q le point qui a pour ordonnée $y = \beta + \varepsilon$ (ε étant très petit). Ces deux points sont réels, puisque par hypothèse $\varphi(y)$ est une fonction réelle de y. Je suppose par exemple qu'au point P, $\frac{d^2F}{dx^2} = \Delta$ soit positif, et négatif au point Q.

Par les points P et Q, je mène des parallèles à l'axe des x et je prends sur ces parallèles deux points P' et Q' à gauche de P et de Q. Au point P, $\frac{dF}{dx}$ est nul et $\frac{d^2F}{dx^2}$ positif; donc si le point P' est assez

voisin de P, la dérivée première $\frac{dF}{dx}$ y sera négative. On verra de la même façon que si le point Q' est assez voisin de Q, $\frac{dF}{dx}$ y sera positive. Allons du point P' au point Q' en suivant une courbe qui s'éloigne très peu de la branche B, mais qui ne coupe pas cette branche; cela est toujours possible. Nous verrons $\frac{dF}{dx}$ changer de signe; il faut donc qu'à un certain moment $\frac{dF}{dx}$ s'annule et par conséquent que nous traversions une branche de la courbe C. Il y a donc une seconde branche de cette courbe qui vient passer par le point M.

En d'autres termes, ce point M est au moins un point double de la courbe C; je puis même affirmer que c'est un point multiple d'ordre pair.

Il est à remarquer que dans la démonstration précédente, nous n'avons pas été obligés de supposer que la fonction F est holomorphe, mais seulement qu'elle est finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

Il y a un cas particulier sur lequel il est nécessaire d'attirer l'attention. Soit

$$F = yx^2, \qquad \frac{dF}{dx} = 2xy, \qquad \Delta = 2y.$$

Nous avons une première série de positions d'équilibre réelles qui nous sont données par l'équation $x = 0$. Comme Δ s'annule avec y, il doit passer par le point $x = y = 0$ une seconde branche de la courbe C et en se reportant à la valeur de $\frac{dF}{dx}$, on voit que cette seconde branche n'est autre chose que la droite

$$y = 0.$$

Cette droite ne représente pas une série linéaire de positions d'équilibre analogue à celles que nous avons rencontrées jusqu'ici. C'est une série de positions d'équilibre indifférent; car si y s'annule, l'équilibre subsiste quel que soit x.

Supposons maintenant que la fonction F ne contenant toujours qu'une seule variable x, dépende non plus d'un seul paramètre y, mais de deux

paramètres y_1 et y_2. Nous pourrons regarder x, y_1 et y_2 comme les coordonnées d'un point dans l'espace; alors l'équation

$$\frac{dF}{dx} = 0$$

représentera une surface S dont chacun des points correspondra à une position d'équilibre.

L'équation

$$\Delta = \frac{d^2F}{dx^2} = 0$$

représentera une seconde surface S'. Supposons que l'on considère une nappe N de la surface S représentée par une équation

$$x = \varphi(y_1, y_2)$$

où φ est une fonction finie, continue et *réelle* de y_1 et de y_2. Supposons que cette nappe soit coupée par la surface S' et de telle sorte que Δ change de signe quand on traverse la surface S' en suivant la nappe N. Alors la courbe d'intersection de N et de S' est une courbe double (ou multiple d'ordre supérieur, mais pair) de la surface S, par laquelle vient passer une autre nappe N' de cette surface S.

Il suffit en effet pour être ramené au cas d'un seul paramètre, de supposer entre y_1 et y_2 une relation linéaire

$$y_1 = ay_2 + b$$

ou en d'autres termes, de couper les surfaces S et S' par un plan quelconque parallèle à l'axe des x.

On arriverait évidemment à un résultat analogue dans le cas où l'on aurait p paramètres $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Supposons maintenant $n = 2$; de telle façon que nous ayons deux variables x_1 et x_2 définissant la position du système et un seul paramètre y. Je regarderai alors x_1, x_2 et y comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Les équations d'équilibre:

$$\frac{dF}{dx_1} = 0, \qquad \frac{dF}{dx_2} = 0$$

représenteront alors deux surfaces S_1 et S_2 dont l'intersection sera une courbe gauche C. Soient

$$(4) \qquad x_1 = \varphi_1(y), \qquad x_2 = \varphi_2(y)$$

deux fonctions finies, continues et réelles de y et supposons que ces équations (4) représentent une branche B de la courbe C. Soit M un point de cette branche B; supposons que si l'on suit la branche B dans le sens des y croissants, on voie Δ changer de signe au moment où on franchit le point M. Soient P et Q deux points de B ayant pour ordonnées $y = \beta - \varepsilon$, $y = \beta + \varepsilon$; (l'ordonnée du point M étant $y = \beta$). Au point P, Δ sera par exemple positif, et négatif au point Q.

S'il en est ainsi, je dis qu'il passera par le point M une seconde branche de la courbe C.

En effet par les divers points de l'arc de courbe PQ faisons passer des plans parallèles au plan des $x_1 x_2$ et dans chacun de ces plans décrivons une circonférence de rayon r ayant son centre au point correspondant de l'arc PQ. Ces diverses circonférences engendreront une certaine surface Σ qui sera doublement connexe et limitée par les deux circonférences K et K' qui ont pour centres les points P et Q. De plus d'après ce mode de génération aucun point de la branche B ne peut se trouver sur la surface Σ.

Pour trouver le nombre des points d'intersection de cette surface Σ avec la courbe C, il faut maintenant chercher ce que M. Kronecker appelle (Berliner Monatsberichte, Mars 1869) la *caractéristique* du système des surfaces Σ, S et S_1. Le nombre des points d'intersection de ces trois surfaces, (ou si l'on veut de la surface Σ et de la courbe C) qui satisfont à certaines conditions, diminué du nombre des points d'intersection qui ne satisfont pas à ces mêmes conditions, est égal d'après le mémoire cité de M. Kronecker à une certaine intégrale. Cette intégrale est prise le long des limites du domaine Σ, c'est à dire le long des deux circonférences K et K'.

L'espace pourra être regardé comme partagé en quatre régions a, b, c, d suivant le signe des deux fonctions $\frac{dF}{dx_1}$ et $\frac{dF}{dx_2}$. Dans la région a, par exemple les deux fonctions seront positives; dans la région b, $\frac{dF}{dx_1}$

sera positif et $\frac{dF}{dx_2}$ négatif, etc. Δ étant positif au point P, on rencontrera en suivant la circonférence K les quatre régions dans l'ordre circulaire suivant $abcd$, pourvu toutefois que r soit suffisamment petit. Nous supposons qu'on ait parcouru K de façon à laisser à sa gauche la domaine Σ. L'intégrale de M. Kronecker le long de K est alors égale à 1. Δ étant négatif au point Q, on rencontrera en suivant K' les quatre régions dans l'ordre circulaire $adcb$, si l'on décrit cette circonférence dans le même sens que K. Mais si l'on veut laisser le domaine Σ à sa gauche, il faut décrire K' en sens contraire et alors les quatre régions se succèdent dans l'ordre $abcd$. L'intégrale est donc encore égale à 1 et l'intégrale totale est égale à 2.

Le nombre des points d'intersection de Σ et de C est donc au moins égal à 2; et aucun de ces points ne peut appartenir à B. Il faut donc que par le point M passe une seconde branche de la courbe C.

C. Q. F. D.

(Dans le cas où le théorème de M. Kronecker s'applique à une multiplicité à deux dimensions et à deux fonctions X et Y, et où par conséquent son intégrale doit être prise le long d'une courbe fermée, on voit aisément que cette intégrale est égale à la demi-différence du nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$ et du nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $+\infty$ à $-\infty$.)

Le résultat s'étendrait sans peine au cas où nous aurions un plus grand nombre de variables. Le théorème de M. Kronecker serait en effet encore applicable.

Résumons les résultats de ce paragraphe.

Les formes d'équilibre du système considéré sont données par les n équations:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0.$$

Ces n équations auront un certain nombre de solutions réelles et quand y variera d'une façon continue, ces solutions varieront elles-mêmes d'une façon continue de manière à former diverses *séries linéaires de formes d'équilibre.*

Il pourra d'ailleurs arriver qu'une même forme d'équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires. Nous dirons alors que c'est une *forme de bifurcation*. On peut en effet, pour une valeur de y infiniment voisine de celle qui correspond à cette forme, trouver *deux* formes d'équilibre qui diffèrent infiniment peu de la forme de bifurcation.

Il peut arriver également que deux séries linéaires de formes d'équilibre réelles, viennent, quand on fait varier y, à se confondre, puis à disparaître, parce que les racines des équations d'équilibre deviennent imaginaires. La forme d'équilibre correspondante s'appellera alors *forme limite*.

Une forme d'équilibre ne peut être une forme de bifurcation ou une forme limite qu'à la condition que Δ soit nul. Il résulte de là que si les équations d'équilibre admettent pour une certaine valeur de y une solution pour laquelle Δ ne soit pas nul, elles en admettront encore une et infiniment peu différente de la première, pour les valeurs de y suffisamment voisines de celle que l'on avait considérée d'abord. En effet s'il n'en était pas ainsi, la forme d'équilibre qui correspond à la première solution serait une forme limite, ce qui exigerait que Δ fût nul.

Si l'on suit une série linéaire de formes d'équilibre réelles en faisant varier y et que l'on voie Δ s'annuler et changer de signe, la forme d'équilibre correspondante ne peut être une *forme limite* puisque les formes d'équilibre très voisines qui appartiennent à la série linéaire sont supposées réelles. Il résulte de ce qui précède que c'est toujours une *forme de bifurcation*.

Si enfin, en suivant une série linéaire de formes réelles, on voit Δ s'annuler, mais sans changer de signe, on est sûr, pour la raison que je viens de dire, que la forme correspondante n'est pas une forme limite. Elle peut être une forme de bifurcation, mais il n'en est pas toujours ainsi.

§ 3. *Echange des stabilités.*

Considérons la forme quadratique:

$$\Phi = \sum \frac{d^2F}{dx_i dx_k} X_i X_k \qquad (i=1, 2, \dots, n;\ k=1, 2, \dots, n)$$

contenant les n indéterminées $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Cette forme aura pour discriminant Δ.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut et il suffit (puisqu'il s'agit d'un équilibre absolu) que la fonction des forces F soit maximum, c'est à dire que la forme Φ soit définie négative.

Imaginons qu'on ait décomposé la forme Φ en une somme de n carrés:

$$\Phi = \sum \alpha_i Y_i^2 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

où Y_i est une fonction linéaire des X. Supposons que parmi les coëfficients α, que j'appellerai coëfficients de stabilité, il y en ait ν positifs et $n-\nu$ négatifs. Δ sera positif si $n-\nu$ est pair, et négatif si $n-\nu$ est impair. Δ sera nul quand un des coëfficients α s'annulera. Enfin il y aura stabilité si tous les coëfficients de stabilité sont négatifs. Il est inutile de faire observer que le nombre ν est indépendant de la manière dont la forme Φ a été décomposée en carrés.

Supposons que pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, $y = 0$, on ait une forme d'équilibre de bifurcation, c'est à dire que les n dérivées partielles $\frac{dF}{dx_i}$ s'annulent ainsi que Δ. Je dis que nous pourrons toujours supposer que l'on a aussi:

$$\frac{d^2F}{dx_i dx_k} = 0. \qquad (i \gtrless k)$$

En effet, cela revient à dire que la forme Φ ne contient pas de termes rectangles; or s'il n'en était pas ainsi, on pourrait toujours décomposer la forme Φ en carrés, comme on l'a dit plus haut, c'est à dire qu'on pourrait, par une transformation linéaire, faire disparaître les termes rectangles. Les coëfficients de stabilité sont alors:

$$\frac{d^2F}{dx_1^2}, \quad \frac{d^2F}{dx_2^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2F}{dx_n^2}.$$

Pour que Δ s'annule, il faut et il suffit qu'un ou plusieurs de ces coëfficients s'annulent. Supposons par exemple que $\frac{d^2F}{dx_1^2}$ s'annule et que les autres coëfficients ne s'annulent pas. Supposons enfin que la fonction F soit holomorphe et puisse se développer suivant les puissances de x et de y.

De l'équation:

$$\frac{dF}{dx_2} = 0$$

nous tirerons x_2 en fonction holomorphe de x_1, x_3, ..., x_n et y. Pour que cela soit possible, il suffit que $\frac{d^2F}{dx_2^2}$ ne soit pas nul, ce qui a lieu en effet. Substituons ensuite partout à la place de x_2 la valeur ainsi trouvée. De l'équation:

$$\frac{dF}{dx_3} = 0$$

nous tirerons ensuite x_3 en fonction holomorphe de x_1, x_4, ..., x_n et y. Cela est encore possible parce que $\frac{d^2F}{dx_3^2}$ n'est pas nul. On continuera de la sorte jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux variables x_1 et y et une seule équation d'équilibre:

$$\frac{dF}{dx_1} = 0.$$

Quant à x_2, x_3, ..., x_n, les autres équations d'équilibre, résolues comme on vient de le dire, les fournissent sous la forme:

$$(1) \qquad x_2 = \varphi_2(x_1, y),\ x_3 = \varphi_3(x_1, y),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(x_1, y)$$

les φ étant holomorphes.

Quant à l'équation $\frac{dF}{dx_1} = 0$, elle s'écrira, toutes réductions faites:

$$(2) \qquad 0 = ax_1^2 + 2bx_1y + cy^2 + \theta$$

θ représentant un ensemble de termes de degré supérieur au second en x_1 et y. On voit que si x_1 et y sont les coordonnées d'un point dans un plan, cette équation représente une courbe à point double, ce qui montre de nouveau que la forme d'équilibre considérée est une forme de bifurcation. Nous supposerons

$$b^2 - ac \gtrless 0.$$

Nous tirerons alors de l'équation (2), x_1 en fonction de y de deux manières différentes

$$(3) \qquad x_1 = \psi_1(y), \qquad x_1 = \psi_2(y)$$

les ψ étant holomorphes. Les deux équations (3) jointes aux équations (1) nous donnent les deux séries linéaires de formes d'équilibre.

Formons Δ et considérons le d'abord comme fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et y. En remplaçant $x_2, \ldots, x_n$ par leurs valeurs tirées des équations (1), Δ ne sera plus fonction que de x_1 et de y et on reconnaîtra aisément que:

$$\Delta = 2M(ax_1 + by) + \Delta_1$$

M étant le produit des $n - 1$ dérivées $\frac{d^2F}{dx_2^2}, \frac{d^2F}{dx_3^2}, \ldots, \frac{d^2F}{dx_n^2}$ et Δ_1 étant un ensemble de termes de degré supérieur au premier.

L'équation $\Delta = 0$ représentera alors une courbe Δ passant par l'origine dans le plan des x, y et l'équation (2) représentera une courbe C formée de deux branches B et B'. Les équations de ces deux branches de courbe qui ne sont autres que les équations (3) pourront s'écrire:

$$x_1 = y\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right) + Y_1$$

$$x_1 = y\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right) + Y_2$$

Y_1 et Y_2 étant des termes de degré supérieur au premier. Si dans l'expression Δ on remplace x_1 par $\psi_1(y)$ ou par $\psi_2(y)$ on trouve:

$$\Delta = \pm 2M\sqrt{b^2 - ac}\, y + \Delta_2$$

Δ_2 représentant un ensemble de termes de degré supérieur au premier. Le signe $+$ se rapporte à la substitution de ψ_1, c'est à dire à la branche B et le signe $-$ à la substitution de ψ_2, c'est à dire à la branche B'.

Ainsi que l'on suive la branche B ou la branche B', on verra Δ changer de signe en même temps que y. De plus pour toutes les valeurs de y, voisines de 0, Δ a des valeurs de signe contraire selon qu'on suit la branche B ou la branche B'. Par exemple, pour y positif, Δ sera positif sur la branche B et négatif sur la branche B'; pour y négatif, ce sera le contraire, Δ sera négatif sur la branche B et positif sur la branche B'.

Supposons qu'à l'origine, un des coëfficients de stabilité soit nul (ce qui est conforme à l'hypothèse faite plus haut), que ν de ces coëfficients

soient négatifs et $n-\nu-1$ positifs. Dans le voisinage de l'origine, il y aura toujours (par raison de continuité) ν ou $\nu+1$ coëfficients de stabilité négatifs. Si ν est pair, il y en aura ν toutes les fois que Δ sera positif et $\nu+1$ toutes les fois que Δ sera négatif. Ce sera le contraire si ν est impair.

Il résulte de là que, si pour y positif, on a ν coëfficients négatifs sur la branche B et $\nu+1$ coëfficients négatifs sur la branche B'; ce sera l'inverse pour y négatif et on aura alors $\nu+1$ coëfficients négatifs sur la branche B et ν sur la branche B'. Si au contraire, on a, pour y positif, $\nu+1$ coëfficients négatifs sur la branche B et ν sur la branche B', on aura inversement, pour y négatif, ν coëfficients négatifs sur la branche B et $\nu+1$ sur la branche B'.

Pour qu'il y ait stabilité, il faut et il suffit que tous les coëfficients de stabilité soient négatifs. Si donc pour y positif, il y a stabilité sur la branche B et instabilité sur la branche B', ce sera l'inverse pour y négatif. De même si pour y positif il y a instabilité sur la branche B et stabilité sur B', ce sera encore l'inverse pour y négatif. En d'autres termes, il y a *échange des stabilités* entre les deux branches B et B' au moment où elles se croisent.

Pour établir ce résultat, j'ai supposé, non seulement que F était continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, mais encore que cette fonction était holomorphe. Cette hypothèse n'est nullement nécessaire. Pour le faire voir, je vais reprendre le raisonnement en supposant $n=1$.

Dans ce cas la courbe C se réduit à une courbe plane et Δ à $\frac{d^2F}{dx^2}$. Soit o le point du plan qui correspond à la forme d'équilibre de bifurcation. Du point o comme centre décrivons un cercle K de rayon très petit. Ce cercle K rencontrera la courbe C en un certain nombre de points. Il résulte du raisonnement du paragraphe précédente, que si un arc de courbe joint deux points de C où le signe de Δy ne soit pas le même, cet arc devra couper la courbe C en un nombre impair de points; et que si au contraire Δy a même signe aux deux extrémités, l'arc de courbe considéré devra couper C en un nombre pair de points. Donc si l'on envisage les différents points d'intersection de C et de K dans l'ordre où on les rencontre en suivant le cercle K, on verra que

Δy y sera alternativement positif et négatif. Le nombre total des points d'intersection est donc pair. Si nous supposons en particulier que deux branches de courbe seulement viennent passer au point o, nous aurons alors deux points d'intersection α_1 et α_2 où y sera négatif et deux points d'intersection β_1 et β_2 où y sera positif. La branche $o\beta_1$ devra alors être regardée comme le prolongement de la branche $\alpha_1 o$, de même que $o\beta_2$ comme le prolongement de $\alpha_2 o$. Je suppose, pour fixer les idées, qu'en α_1, Δ soit positif. Alors d'après la règle qui précède, Δ sera négatif en α_2, négatif encore en β_1 et positif en β_2, ce qui confirme le résultat précédemment obtenu. Il serait aisé, d'après les considérations que je viens d'exposer, de voir ce qui se passerait si plus de deux branches de courbe venaient passer en o.

Nous avons dit plus haut que si en suivant une série réelle de formes d'équilibre, on voyait Δ s'annuler sans changer de signe, on ne pouvait affirmer que la forme correspondante fût une forme de bifurcation. Nous pouvons remarquer que Δ peut de deux manières s'annuler sans changer de signe. Il peut arriver ou bien que plusieurs coëfficients de stabilité s'annulent sans changer de signe; ou bien que deux (ou un nombre pair) de ces coëfficients changent de signe. Dans le premier cas, nous ne pouvons en effet rien affirmer; voyons ce qui ce passe dans le second.

Nous supposerons pour fixer les idées que

$$\frac{d^2F}{dx_i dx_k} = 0, \qquad (i \gtrless k) \qquad \frac{d^2F}{dx_1^2} = \frac{d^2F}{dx_2^2} = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx_3^2} \gtrless 0, \quad \frac{d^2F}{dx_4^2} \gtrless 0, \quad \ldots, \quad \frac{d^2F}{dx_n^2} \gtrless 0.$$

Il arrivera alors que des $n - 2$ équations d'équilibre

$$\frac{dF}{dx_3} = \frac{dF}{dx_4} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

on pourra tirer $x_3, x_4, \ldots, x_n$ en fonctions holomorphes de x_1, x_2 et y. Si dans les deux autres équations d'équilibre:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = 0$$

on substitue ces valeurs de $x_3, x_4, \ldots, x_n$, ces équations deviennent:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 &= 0 \\ \Phi_1' + \Phi_2' &= 0, \end{aligned}$$

où Φ_1 et Φ_1' représentent un ensemble de termes du 2[d] degré en x_1, x_2, y et Φ_2 et Φ_2' un ensemble de termes de degré supérieur au second; (si l'on suppose comme plus haut que la position d'équilibre envisagée soit $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = y = 0$).

Regardons x_1, x_2 et y comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Les deux équations (4) représenteront deux surfaces ayant chacune à l'origine un point conique du 2[d] ordre. L'intersection de ces deux surfaces sera la courbe C. On voit que par l'origine passeront 4 branches de la courbe C, réelles ou imaginaires. Mais une de ces 4 branches est certainement réelle, puisque j'ai supposé au début qu'on a pu suivre dans le voisinage de la position d'équilibre envisagée, une série de formes d'équilibre réelles. Il faut donc quil y ait une autre des quatre branches qui soit réelle. La forme d'équilibre envisagée est donc de bifurcation.

D'où la conclusion suivante:

Pour qu'une forme d'équilibre appartenant à une série linéaire réelle soit de bifurcation, il suffit, non seulement que Δ change de signe, mais que l'un quelconque des coëfficients de stabilité change de signe.

§ 4. *Cas d'un nombre infini de variables.*

Les problèmes traités dans les deux paragraphes précédents ne présentent aucune espèce de difficulté. Malheureusement lorsqu'on recherche la figure d'équilibre d'une masse fluide soumise à diverses forces, la question est beaucoup plus compliquée. En effet la figure d'une pareille masse dépend, non pas d'un nombre fini de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais d'un nombre infini de variables.

Supposons par exemple une aire plane A peu différente d'un cercle; l'équation de la courbe qui limite cette aire plane pourra s'écrire, en coordonnées polaires (ρ et φ)

$$\rho = r + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \ldots + \beta_n \cos n\varphi + \ldots$$
$$+ \gamma_1 \sin\varphi + \gamma_2 \sin 2\varphi + \ldots + \gamma_n \sin n\varphi + \ldots$$

les β et les γ étant très petits par rapport à r, et la figure de l'aire plane dépendra des coëfficients r, β et γ qui sont en nombre infini.

Supposons que tous les éléments de l'aire A s'attirent en raison inverse des distances et en raison directe de leurs surfaces. Il résultera de cette attraction une énergie potentielle W qui sera représentée par l'intégrale suivante:

$$W = \iint d\omega\, d\omega' \log\frac{1}{\Delta}$$

$d\omega$ et $d\omega'$ étant deux éléments quelconques de l'aire A et Δ la distance de ces deux éléments. On reconnait alors que W est une fonction holomorphe de r, des β et des γ. Je veux dire que si l'on fait varier seulement un nombre fini n de ces coëfficients, les autres restant constants, W sera une fonction holomorphe des n coëfficients variables.

Supposons que les β et les γ étant regardés comme très petits, on calcule l'intégrale W en négligeant les cubes des β et des γ. On trouvera:

$$W = \frac{\pi^2 r^4}{2}\left(\log\frac{1}{r} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi^2 r^2}{2}\sum\nolimits_n (\beta_n^2 + \gamma_n^2)\left(\frac{1}{n} - 1 + \log\frac{1}{r}\right).$$

On pourra tirer de là la conclusion suivante:

Si l'on suppose que l'aire A soit assujettie à être équivalente à une aire donnée πr_0^2 de telle sorte que:

$$(1) \qquad r^2 + \sum \frac{\beta_n^2 + \gamma_n^2}{2} = r_0^2$$

et qu'en même temps β_1 et γ_1 soient assujettis à être nuls, le cercle dont le rayon est r_0 sera une forme d'équilibre de l'aire A.

On déduit de (1) que

$$r^2 = r_0^2 - \sum \frac{\beta_n^2 + \gamma_n^2}{2}$$

et en négligeant toujours les cubes des β et des γ

$$W = \frac{\pi^2 r_0^4}{2}\left(\log\frac{1}{r_0} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi^2 r_0^2}{2}\sum (\beta_n^2 + \gamma_n^2)\left(\frac{1}{n} - 1\right).$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que si l'on regarde W comme une fonction d'un nombre fini des coëfficients β et γ, les autres coëfficients restant constants, on aura:

$$\frac{d^2W}{d\beta_n d\gamma_n} = 0, \qquad \frac{d^2W}{d\beta_n^2} = \frac{d^2W}{d\gamma_n^2} = 2\left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

$$\frac{d^2W}{d\beta_i d\beta_k} = \frac{d^2W}{d\gamma_i d\gamma_k} = 0. \qquad (i \gtrless k)$$

Il résulte de là que la série infinie

$$\pi^2 r_0^2 \sum (\beta_n^2 + \gamma_n^2)\left(\frac{1}{n} - 1\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots, \text{ad inf.})$$

joue le même rôle que jouait la forme quadratique Φ dans le paragraphe précédent, avec cette différence, qu'au lieu d'un nombre fini de variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, il y entre un nombre infini de variables β_n et γ_n.

Les coëfficients de stabilité sont alors les quantités $\pi r_0^2\left(\frac{1}{n} - 1\right)$. On voit que tous ces coëfficients sont négatifs, de telle façon que l'équilibre est stable.

Cet exemple permet de voir comment la notion des coëfficients de stabilité peut s'étendre au cas où l'équilibre dépend d'un nombre infini de conditions.

On peut de même étendre à ce cas la notion des formes d'équilibre de bifurcation et des formes d'équilibre limite. Supposons en effet que les forces auxquelles sont soumis les éléments de l'aire A dépendent d'un paramètre y. Pour chaque valeur de y nous aurons un certain nombre de formes d'équilibre. Lorsque y variera, ces formes varieront aussi, en général d'une manière continue. On aura ainsi un certain nombre de séries linéaires de formes d'équilibre. Pour chacune de ces séries, les coëfficients β et γ seront des fonctions finies, continues, uniformes et réelles de y. Il pourra arriver alors que quand y tendra vers une certaine valeur α, deux formes d'équilibre réelles, appartenant à deux de ces séries linéaires, tendront à se confondre. Lorsque y aura dépassé cette valeur α, il arrivera, ou bien que les deux formes d'équilibre envisagées disparaîtront et cesseront d'être réelles, ou bien qu'elles resteront réelles et

cesseront de se confondre. Dans le premier cas, on aura une forme d'équilibre limite. Dans le second cas, une forme d'équilibre de bifurcation. Rien n'est donc changé à ces définitions qui restent les mêmes que dans les cas précédemment examinés.

Il reste à étendre les résultats du paragraphe précédent au cas qui nous occupe actuellement. Il faut montrer que:

1°. Pour une forme d'équilibre limite, l'un des coëfficients doit s'annuler.

2°. Si l'on suit une série linéaire de formes d'équilibre et si l'on voit un des coëfficients de stabilité changer de signe, la forme qui correspond à la valeur de y pour laquelle se fait le changement de signe, est une forme de bifurcation.

3°. La loi de l'échange des stabilités s'étend au cas qui nous occupe.

Nous démontrerons ces trois propositions en partant de l'hypothèse suivante:

Le nombre des variables étant infini, celui des coëfficients de stabilité devra également être infini; *mais je supposerai que parmi les coëfficients, il n'y en a qu'un nombre fini qui soient positifs.*

J'appellerai $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ les variables qui définissent la forme du système et y un paramètre dont dépendront les forces qui agissent sur ce système. Je supposerai que ces variables ont été choisies de telle sorte que pour la forme d'équilibre envisagée et que nous appellerons A, on ait:

$$0 = y = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots$$

Si dans la fonction des forces $F(x, y)$ on fait $y = 0$, nous pouvons encore supposer que les variables x aient été choisies de telle sorte que l'on puisse écrire, en négligeant les cubes des quantités x supposées très petites:

$$F(x, 0) = A + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2 + \alpha_{n+1} x_{n+1}^2 + \ldots + \alpha_p x_p^2 + \ldots$$

Nous supposerons, conformément à l'hypothèse faite plus haut, que parmi les n coëfficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ il peut y en avoir de positifs ou de nuls, mais que tous les coëfficients suivants $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_p, \ldots$ sont négatifs.

Avant d'aller plus loin, je dois faire une autre remarque. Quand

nous n'avions qu'un nombre fini de variables, nous regardions la fonction F comme définie pour toutes les valeurs des x, ou du moins pour toutes les valeurs suffisamment petites de ces variables. Il n'en peut plus être de même ici. La fonction F ne sera définie que quand une certaine série à termes positifs:

$$\lambda_1|x_1| + \lambda_2|x_2| + \lambda_3|x_3| + \ldots + \lambda_n|x_n| + \ldots \tag{2}$$

sera convergente. Le choix des variables x étant encore arbitraire dans une certaine mesure, nous pouvons supposer qu'on les ait choisies de façon que tous les λ soient égaux à 1.

Cela posé, nous pouvons passer à la démonstration des trois propositions énoncées ci-dessus.

1°. Je dis d'abord que si aucun des coëfficients α n'est nul, la forme A ne pourra être une forme limite, c'est à dire que pour des valeurs de y très petites (mais d'ailleurs positives ou négatives), le système sera susceptible d'une forme d'équilibre très voisine de cette forme A.

Pour le démontrer, je vais introduire dans le système des liaisons exprimées par les équations suivantes:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \ldots, \quad x_n = y_n,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant des constantes que nous regarderons comme données. Les conditions de l'équilibre du système assujetti à ces liaisons, dépendront naturellement du choix des $n + 1$ paramètres $y, y_1, y_2, \ldots, y_n$ et elles seront exprimées par les équations en nombre infini:

$$0 = \frac{dF}{dx_{n+1}} = \frac{dF}{dx_{n+2}} = \ldots = \frac{dF}{dx_p} = \ldots$$

Dans le cas particulier où

$$y = y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$$

l'équilibre aura lieu pour:

$$0 = x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_p = \ldots$$

c'est à dire en même temps que l'équilibre du système supposé libre. Mais il y a une différence importante entre les deux cas. L'équilibre du

système libre est instable parce que parmi les coëfficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, il y en a de positifs. L'équilibre du système à liaisons sera stable parce que tous les coëfficients $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_p, \ldots$ sont négatifs.

Je dis que pour les valeurs des $n + 1$ paramètres y suffisamment voisines de 0, le système à liaisons sera susceptible d'une forme d'équilibre stable très voisine de la forme A. En d'autres termes, si l'on fait:

$$(3) \qquad y = \beta, \; y_1 = \beta_1, \; \ldots, \; y_n = \beta_n$$

on pourra prendre les β assez petits pour que la fonction F soit susceptible d'un maximum (en tenant compte des liaisons) et pour que ce maximum ait lieu pour des valeurs des x aussi petites que l'on veut.

Appelons en effet D le domaine comprenant tous les systèmes de valeurs des variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_p, \ldots$ qui sont telles que la série

$$(4) \qquad -\alpha_{n+1}x_{n+1}^2 - \alpha_{n+2}x_{n+2}^2 - \ldots - \alpha_p x_p^2 - \ldots$$

soit convergente et ait une somme plus petite que ε. La limite du domaine D se composera d'un domaine δ comprenant tous les systèmes des valeurs des x tels que la série (4) soit convergente et ait une somme égale à ε.

Quand les y sont nuls, la fonction F est égale à A quand les x sont nuls, et à $A - \varepsilon + \zeta$ quand les x appartiennent au domaine δ (ζ étant un infiniment petit d'ordre supérieur à celui de ε). Donnons maintenant aux y les valeurs (3). La fonction F étant continue, nous pourrons prendre les β assez petits pour que F diffère aussi peu que nous voudrons de A quand les x sont nuls, et aussi peu que nous voudrons de $A - \varepsilon + \zeta$ quand les x appartiennent au domaine δ. On pourra donc prendre les β assez petits pour que F soit plus grand quand les x sont nuls qu'en aucun point du domaine δ.

Il en résulte que la fonction F prendra en certains points du domaine D des valeurs plus grandes qu'en aucun des points de la limite de ce domaine. Il faut donc conclure qu'en un certain point du domaine D, la fonction F atteint un maximum. Il est necessaire toutefois, pour que cette conclusion s'impose, que l'on admette que la fonction F ne va pas en augmentant indéfiniment à mesure que la série (2) devient de moins en moins convergente. Il y aurait bien des objections à faire, mais on

ne saurait exiger en mécanique la même rigueur qu'en analyse pure pour ce qui concerne l'infini.

Le principe auquel nous sommes ainsi conduits peut s'énoncer ainsi:

Si un système mécanique quelconque, et en particulier une masse fluide, sont en équilibre stable sous l'action de certaines forces, et si on vient y appliquer en outre des forces perturbatrices infiniment petites, ce système prendra sous l'action de ces forces, une figure d'équilibre stable infiniment peu différente de sa figure primitive.

Je ne crois pas qu'on puisse le mettre sérieusement en doute, malgré les objections dont je viens de parler et qui sont de nature à intéresser plutôt l'analyste que le mécanicien.

Cela posé, la forme d'équilibre stable du système à liaisons doit être regardée comme définie; elle le sera par exemple par les équations

$$(5)\quad x_{n+1}=\varphi_{n+1}(\beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_n);\quad x_{n+2}=\varphi_{n+2}(\beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_n);\ \dots$$

Les fonctions φ seront des fonctions continues des β et elles s'annuleront avec β quelles que soient les valeurs de $\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_n$.

Si nous substituons dans F ces valeurs des $x_{n+1},\ x_{n+2},\ \dots,\ x_p,\ \dots$, cette fonction ne dépendra plus que de $\beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_n$.

Il faut maintenant chercher quelles valeurs on doit donner à $\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_n$ pour que l'équilibre subsiste (sans toutefois rester stable) quand on supprime les liaisons. Il faut pour cela que l'on ait:

$$\frac{dF}{d\beta_1}=\frac{dF}{d\beta_2}=\dots=\frac{dF}{d\beta_n}=0.$$

En d'autres termes, il faut considérer que, les x étant définis par les équations (5), la figure du système ne dépend plus que des n variables $\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_n$, et il faut chercher les conditions d'équilibre du système ainsi défini.

Je veux faire voir que pour les valeurs de β voisines de 0, ce système admet une forme d'équilibre. Pour cela il me suffit, puisque ce système ne dépend plus que d'un nombre fini de variables, de chercher les coëfficients de stabilité pour $\beta=0$.

Or pour $\beta=0$, puisque les fonctions φ s'annulent, on a:

$$F=A+\alpha_1\beta_1^2+\alpha_2\beta_2^2+\dots+\alpha_n\beta_n^2+Z$$

Z étant un ensemble de termes d'ordre supérieur au second par rapport aux β. Les coëfficients de stabilité sont donc:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

et, comme aucun d'eux n'est nul, la forme d'équilibre considérée ne peut être une forme limite, et l'équilibre sera encore possible pour les valeurs de β voisines de 0.

Ainsi, même lorsque la forme du système dépend d'un nombre infini de variables, une figure d'équilibre ne peut être une figure limite à moins que l'un des coëfficients de stabilité ne s'annule.

2° et 3°. Il resterait à établir les deux autres propositions enoncées plus haut. On les démontrerait par une méthode absolument identique. On introduirait dans le système les liaisons

$$(6) \qquad x_1 = \beta_1, \; x_2 = \beta_2, \; \ldots, \; x_n = \beta_n$$

de façon que la forme d'équilibre A devienne stable. On trouverait alors que pour:

$$y = \beta, \; x_1 = \beta_1, \; \ldots, \; x_n = \beta_n$$

le système à liaisons est susceptible d'une position d'équilibre stable définie par les équations

$$(5) \qquad x_{n+1} = \varphi_{n+1}(\beta, \beta_1, \ldots, \beta_n); \; \ldots$$

Si l'on suppose maintenant les x assujettis à ces équations (5), mais que l'on supprime les liaisons (6), la fonction F ne dépend plus que des β, la figure du système ne dépend plus que de n variables. On est donc ramené au cas d'un nombre fini de variables, auquel les propositions énoncées s'appliquent d'elles-mêmes.

En résumé, il résulte des considérations exposées dans ce paragraphe que les résultats des paragraphes 2 et 3 s'étendent au cas d'un système dont la figure dépend d'une infinité de variables, et en particulier au cas d'une masse fluide soumise à différentes forces.

§ 5. *Première application.*

MM. Tait et Thomson ont annoncé sans démonstration que, parmi les figures d'équilibre dont est susceptible une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, il y a une figure annulaire de révolution.

On peut démontrer ce résultat en appliquant les principes exposés dans les trois paragraphes précédents.

Je considère une masse fluide homogène égale à M et animée d'une vitesse de rotation ω autour d'un axe quelconque que je prendrai pour axe des z. Je suppose que toutes les molécules de cette masse s'attirent conformément à la loi de Newton. Je choisirai les unités de telle façon que la densité du fluide soit égale à 1, et que l'attraction de deux unités de masse à l'unité de distance soit égale à l'unité de force.

Je puis assujettir la masse fluide à affecter la forme d'une figure de révolution. Si l'équilibre a lieu en tenant compte de cette liaison, il arrivera, en vertu de la nature même du problème, que l'équilibre subsistera encore quand elle sera supprimée. Cette liaison ne change pas les conditions d'équilibre, elle n'influe que sur les conditions de stabilité dont nous ne nous occuperons pas pour le moment.

Soit R la distance à l'axe du centre de gravité de la section méridienne et πr_0^2 l'aire de cette section. On aura:

$$M = 2\pi^2 r_0^2 R. \tag{1}$$

Le plan des xy sera le plan perpendiculaire à l'axe et passant par ce centre de gravité. J'assujettirai encore, pour simplifier un peu les calculs qui vont suivre, la figure de la masse fluide à rester symétrique par rapport au plan des xy. Il est clair que si l'équilibre a lieu avec cette liaison, il subsistera encore sans cette liaison.

Pour définir la section méridienne, je me servirai des coordonnées polaires ρ et φ, en prenant le pôle au centre de gravité et l'axe polaire dans le plan des xy. Soit:

$$\rho = r + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \ldots + \beta_n \cos n\varphi + \ldots$$

l'équation de la section méridienne.

Ecrivons que l'aire de cette section est égale à πr_0^2, il viendra:

$$r_0^2 = r^2 + \frac{\Sigma\beta^2}{2}. \tag{2}$$

Ecrivons que le centre de gravité de cette section est au pôle, il viendra

$$r^2\beta_1 + r(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \ldots + \beta_n\beta_{n+1} + \ldots) + S = 0 \tag{3}$$

S étant une série convergente dont les termes sont homogènes et du troisième degré par rapport aux β.

J'ai à rechercher s'il existe une figure d'équilibre peu différente d'un tore. Je dois donc supposer que les β sont très petits par rapport à r.

Je supposerai de plus que les rapports $\frac{r}{R}$ et par conséquent $\frac{r_0}{R}$ sont très petits, ainsi que ω.

Cela posé soit I le moment d'inertie de la masse fluide par rapport à l'axe. Soit:

$$W = \int \frac{dm\, dm'}{\Delta}$$

l'énergie potentielle due à l'attraction newtonienne (où dm et dm' sont deux éléments quelconques de la masse et Δ la distance de ces deux éléments). Soit:

$$\frac{\omega^2}{2} I$$

l'énergie potentielle due à la force centrifuge. L'équilibre aura lieu quand la variation première de l'expression

$$U = W + \frac{\omega^2}{2} I$$

sera nulle.

Nous allons encore introduire une liaison nouvelle. Nous supposerons que r_0 et par conséquent R sont assujettis à conserver des valeurs données. Cette liaison, à la différence des précédentes, change les conditions d'équilibre. Posons:

$$\beta_i = \gamma_i r_0, \qquad U = A r_0^4 R\left(\log\frac{8R}{r_0} + V + H\right). \tag{4}$$

Il viendra, en tenant compte de (2)

$$(5) \qquad U = A\Big[r_0^4 R\Big(\log\frac{8R}{r_0} + \frac{1}{4}\Big) + \Sigma R\beta_n^2 r_0^2\Big(\frac{1}{n} - 1\Big)\Big] + B + C$$

$$+ \frac{\omega^2\pi^2}{2}(2r_0^2R^3 + \frac{3}{2}Rr_0^4) + \omega^2 D.$$

Dans cette équation, A designe une constante numérique qu'il est inutile de déterminer davantage; B est un ensemble de termes contenant r_0^5 en facteur; C est un ensemble de termes de degré supérieur au second par rapport aux β; enfin D est un ensemble de termes s'annulant avec les β.

Nous donnerons à A la même valeur dans les équations (4) et (5). Il viendra alors:

$$V = \frac{1}{4} + \sum r_n^2\Big(\frac{1}{n} - 1\Big) + \frac{B}{Ar_0^4R} + \frac{C}{Ar_0^4R} + \frac{\pi^2\omega^2}{2A}\Big(\frac{2R^2}{r_0^2} + \frac{3}{2}\Big) + \frac{\omega^2 D}{Ar_0^4R} - H.$$

On trouve aisément:

$$I = \pi\int_0^{2\pi} R^3\rho^2 d\varphi + 2\pi\int_0^{2\pi} R^2\rho^3\cos\varphi d\varphi + \frac{3}{2}\pi\int_0^{2\pi} R\rho^4\cos^2\varphi d\varphi + \frac{2\pi}{5}\int_0^{2\pi}\rho^5\cos^3\varphi d\varphi.$$

Mais les équations (2) et (3) peuvent s'écrire:

$$\int\rho^2 d\varphi = 2\pi r_0^2, \qquad \int\rho^3\cos\varphi d\varphi = 0$$

de sorte qu'il reste simplement:

$$D = \frac{3}{4}\pi R\int(\rho^4 - r_0^4)\cos^2\varphi d\varphi + \frac{\pi}{5}\int(\rho^5 - r_0^5)\cos^3\varphi d\varphi.$$

Nous prendrons

$$H = \frac{\pi^2\omega^2}{A}\frac{R^2}{r_0^2}$$

de sorte que V sera désormais déterminé.

Comme r_0 et R sont provisoirement regardés comme des constantes, le maximum de U aura lieu en même temps que celui de V, de sorte

que l'équilibre de notre système à liaisons aura lieu dans les mêmes conditions que si V était la fonction des forces.

Supposons que dans V, on fasse $r_0 = 0$, il viendra

$$V = \frac{1}{4} + \sum \gamma_n^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{C}{Ar_0^4 R} + \frac{3}{4}\frac{\pi^2\omega^2}{A} + \frac{3}{4}\frac{\pi\omega^2}{A}\int\left(\frac{\rho^4}{r_0^4} - 1\right)\cos^2\varphi d\varphi.$$

Si nous faisons encore $\omega = 0$, il viendra:

$$V = \frac{1}{4} + \sum \gamma_n^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{C}{Ar_0^4 R}.$$

Si l'on tient compte de l'équation (3), il vient:

$$\gamma_1 = E$$

E étant un ensemble de termes du second degré au moins par rapport à $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$. On peut donc écrire:

$$V = \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right) + F$$

F étant un ensemble de termes du troisième degré au moins par rapport à $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$.

Cette équation prouve que si l'on fait $\omega = r_0 = 0$, la fonction V est susceptible d'un maximum qui est atteint quand tous les γ s'annulent. Les coëfficients de stabilité sont:

$$\frac{1}{2} - 1, \ \frac{1}{3} - 1, \ \ldots, \ \frac{1}{n} - 1, \ \ldots$$

Comme aucun de ces coëfficients n'est nul, la forme d'équilibre correspondante ne pourra être une forme limite, c'est à dire que pour les valeurs très petites de r_0 et de ω, le système à liaisons considéré sera susceptible d'une forme d'équilibre, pour laquelle les γ auront des valeurs très petites.

On aura alors pour cette forme d'équilibre:

$$\gamma_n = \varphi_n(r_0, \omega) \tag{6}$$

φ_n étant une fonction continue de r_0 et de ω s'annulant avec ces variables.

Il reste à chercher quelle valeur il faut donner à r_0 pour que l'équilibre subsiste encore quand on supprime la liaison que nous avions provisoirement introduite, et quand on n'assujettit plus r_0 et R à avoir des valeurs données.

Supposons qu'on remplace dans U les γ par leurs valeurs (6) et R par sa valeur tirée de l'équation (1). Alors U ne sera plus fonction que de r_0 et de ω, et on aura la condition pour que l'équilibre subsiste après la suppression de la liaison, en écrivant:

$$\frac{dU}{dr_0} = 0. \tag{7}$$

Je dis que pour les valeurs très petites de ω, il y aura toujours une valeur très petite de r_0 pour laquelle cette condition (7) sera remplie. Nous pourrons écrire:

$$U = Ar_0^2 \log \frac{a}{r_0^3} + \frac{B\omega^2}{r_0^4} + C. \tag{8}$$

Les lettres A, a et B désignent des constantes ne dépendant que de M et C un ensemble de termes très petits par rapport aux deux premiers quand r_0 et ω sont très petits. Inutile d'ajouter que les lettres A, B et C n'ont plus la même signification que dans la première partie de cette démonstration.

Soit s une quantité très petite que nous regarderons comme constante et qui sera telle que:

$$2As \log \frac{a}{s^3} - 3As - \frac{4B\omega^2}{s^5} = 0.$$

Nous allons faire varier r_0 depuis $2s$ jusqu'à 0. Pour $r_0 = 2s$, les deux premiers termes de l'expression (8) se réduisent à:

$$4As^2 \log \frac{a}{8s^3} + \frac{1}{32} As^2 \log \frac{a}{s^3} - \frac{3}{64} As^2 = \frac{125}{32} As^2 \log \frac{a}{s^3} + S_1.$$

Pour $r_0 = s$, ces deux mêmes termes se réduisent à

$$As^2 \log \frac{a}{s^3} + \frac{1}{2} As^2 \log \frac{a}{s^3} - \frac{3}{4} As^2 = \frac{48}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} + S_2.$$

Enfin pour $r_0 = 0$, on a $U = +\infty$. Dans ces égalités, S_1 et S_2 désignent des termes très petits par rapport à $s^2 \log \frac{a}{s^3}$.

On a donc:

$$\text{pour } r_0 = 2s \qquad U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} = \frac{25}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} + \Sigma_1$$

$$\text{pour } r_0 = s \qquad U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} = -\frac{52}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} + \Sigma_2$$

$$\text{pour } r_0 = 0 \qquad U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} = +\infty;$$

Σ_1 et Σ_2 sont des ensembles de termes très petits par rapport à $s^2 \log \frac{a}{s^3}$, et qui n'influent pas sur le signe de l'expression

$$U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3}.$$

Cette expression est donc positive pour $r_0 = 2s$, négative pour $r_0 = s$ et positive pour $r_0 = 0$. Elle s'annule donc deux fois quand r_0 varie de $2s$ à 0; sa dérivée $\frac{dU}{dr_0}$ doit donc s'annuler une fois dans le même intervalle.

C. Q. F. D.

Ainsi pour une valeur donnée très petite de ω, on peut trouver un système de valeurs de r_0 et des γ qui satisfasse aux conditions d'équilibre, et cela après suppression de la liaison que j'avais d'abord provisoirement introduite.

Il en résulte qu'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation est susceptible d'une forme annulaire d'équilibre, qui d'ailleurs est probablement instable.

J'ai donné une esquisse de la présente démonstration dans le Tome II du Bulletin Astronomique. J'ai donné également dans ce même volume une façon de calculer approximativement les éléments de cette figure annulaire. L'analyse que j'ai employée pour déterminer ces éléments présente le plus grandes analogies avec celle dont M^me^ Kowalevski a fait usage dans ses recherches sur l'anneau de Saturne.

§ 6. *Exemples d'équilibres de bifurcation.*

Dans les N^{os} 27 et 28 du Livre III de la *Mécanique Céleste,* LAPLACE traite le problème suivant: Une sphère solide, de densité ρ et de rayon c est recouverte d'une couche fluide homogène de densité 1. Quelle est la figure d'équilibre de cette couche fluide? Quelle sera à l'état d'équilibre la forme de la surface libre de cette couche?

Une des formes d'équilibre est évidemment une sphère concentrique à la sphère solide, auquel cas l'épaisseur de la couche fluide est uniforme.

On peut se demander s'il y en a d'autres. Pour cela appelons

$$r = a(1 + \alpha y)$$

la distance au centre d'un point quelconque de la surface libre. On développera y en série de fonctions sphériques:

$$y = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_i + \ldots$$

et l'équation d'équilibre, comme l'indique LAPLACE page 87 (édition de 1878), s'écrira:

$$(1) \quad 0 = \left[(1-\rho)\frac{c^3}{a^3} + 2\right] Y_0 + (1-\rho)\frac{c^3}{a^3} Y_1 + \left[(1-\rho)\frac{c^3}{a^3} - \frac{2}{5}\right] Y_2 + \ldots$$

pourvu toutefois que l'on néglige le carré de α.

Quant à l'énergie potentielle, elle a pour expression:

$$W = A - g\alpha^2 \int \left[(\rho_1 - 1) Y_1^2 + \left(\rho_1 - \frac{3}{5}\right) Y_2^2 + \ldots\right] d\omega$$

en négligeant le cube de α. A est une constante et l'intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface sphérique (Cf. RÉSAL, *Mécanique Céleste,* 1$^{\text{ère}}$ édition, p. 238).

J'ai posé pour abréger

$$1 - \rho_1 = (1 - \rho)\frac{c^3}{a^3}.$$

Cette expression de W montre qu'on a une forme d'équilibre quand tous les Y s'annulent, c'est à dire quand l'épaisseur de la couche fluide est uniforme. Les coëfficients de stabilité sont:

$$\rho_1 - 1, \ \rho_1 - \frac{3}{5}, \ldots, \rho_1 - \frac{3}{2\nu + 1}, \ldots$$

L'un d'eux s'annulera si l'on a:

$$\rho_1 = \frac{3}{2\nu + 1}$$

ν étant un entier positif. A chaque valeur de ρ_1 correspond une forme d'équilibre parfaitement définie qui est la sphère. Ces sphères forment une série linéaire de figures d'équilibre réelles. Si donc l'un des coëfficients de stabilité s'annule, c'est que la sphère correspondante est une forme d'équilibre de bifurcation.

Etudions d'un peu plus près ce qui se passe. Dans le N° 27, Laplace suppose que la couche fluide considérée est assujettie à conserver une figure de révolution autour de l'axe des z. Dans cette hypothèse, la fonction sphérique Y_ν se réduit au ν^e polynôme de Legendre, de sorte qu'il n'y a qu'un seul coëfficient de stabilité qui soit égal à $\rho_1 - \frac{3}{2\nu + 1}$. On est ainsi ramené au cas le plus simple, celui où un seul coëfficient de stabilité s'annule et où la forme de bifurcation appartient à deux séries linéaires de formes d'équilibre réelles.

Laplace semble dire qu'il ne peut y avoir en général qu'une seule forme d'équilibre lorsque l'on n'a pas:

$$\rho_1 = \frac{3}{2\nu + 1}$$

et que lorsque cette relation a lieu, il y a deux formes d'équilibre, puisque αy est susceptible de deux valeurs, dont l'une est donnée par la supposition de $y = 0$, et dont l'autre est donnée par la supposition de y égal au ν^e polynôme de Legendre.

Ce passage a dû paraître obscur à plus d'un lecteur. En effet Laplace ayant négligé les puissances supérieures de α, ce coëfficient n'intervient plus dans l'équation d'équilibre (1); il semble donc qu'on puisse

le choisir arbitrairement, et alors on n'aurait plus deux figures d'équilibre, mais une infinité, qui seraient comprises dans l'équation générale:

$$y = \lambda Y_\nu$$

λ étant une constante arbitraire et Y_ν le ν^e polynôme de LEGENDRE.

Il semblerait donc que pour les valeurs de ρ_1 différentes de $\frac{3}{2\nu + 1}$, la sphère serait la seule figure d'équilibre possible, et que pour les valeurs de ρ_1 de la forme $\frac{3}{2\nu + 1}$, il y aurait une infinité de figures d'équilibre indifférent. Mais les termes de degré supérieur en α empêchent qu'il en soit ainsi.

Pour les valeurs de ρ_1 très voisines de $\frac{3}{2\nu + 1}$, il y a deux figures d'équilibre: l'une est une sphère, et l'autre est très peu différente d'une sphère. Toutes deux se confondent pour:

$$\rho_1 = \frac{3}{2\nu + 1}$$

Il y a cependant une exception; pour $\nu = 1$, on trouve $\rho_1 = 1$. La densité de la sphère solide étant alors la même que celle de la couche fluide, le sphéroïde est homogène, et l'équilibre subsistera quand la surface libre, au lieu d'être une sphère concentrique à la sphère solide, sera une sphère dont le centre sera quelconque (pourvu toutefois que les deux sphères ne se coupent pas).

L'équilibre est donc indifférent. Pour $\rho_1 = 1$, la figure formée par les deux sphères concentriques est donc encore une figure de bifurcation, mais on se trouve dans un de ces cas exceptionnels que j'ai signalés au paragraphe 2. Cette figure appartient bien encore à deux séries linéaires de formes d'équilibre. Mais il n'arrive plus, comme cela a lieu d'ordinaire, que pour chaque valeur de ρ_1 voisine de 1, on trouve dans chacune des deux séries une figure d'équilibre et une seule. Une seule des deux séries présente ce caractère; l'autre est une série de formes d'équilibre indifférent qui correspondent toutes au cas de $\rho_1 = 1$.

Dans le N° 28, LAPLACE passe au cas où la figure d'équilibre n'est plus assujettie à être de révolution. Dans ce cas il y a $2\nu + 1$ fonc-

tions sphériques Y_ν linéairement indépendantes. Donc quand ρ_1 devient égal à $\frac{3}{2\nu + 1}$, il y a $2\nu + 1$ coëfficients de stabilité qui s'annulent à la fois. Donc pour les valeurs de ρ_1 très voisines de $\frac{3}{2\nu + 1}$, il y a non pas deux figures d'équilibre peu différentes d'une sphère, mais un plus grand nombre. Il y en a même une infinité, si l'on tient compte de ce fait que si on a une figure d'équilibre non sphérique, l'équilibre subsiste quand on oriente cette figure d'une manière quelconque.

Je pense que ces remarques suffiront pour éclaircir ce qu'il pouvait y avoir d'obscur dans le texte de LAPLACE.

§ 7. *Stabilité de l'équilibre relatif.*

Il est très facile de trouver les conditions de stabilité de l'équilibre absolu d'un système matériel rapporté à des axes fixes; pour qu'un tel équilibre soit stable, il faut et il suffit que la fonction des forces soit maximum. Mais le problème de la stabilité de l'équilibre relatif d'un système matériel rapporté à des axes mobiles est infiniment plus compliqué. Cette théorie n'a jamais, à ma connaissance, été convenablement traitée que dans le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. TAIT et THOMSON. Elle repose sur la distinction de la stabilité séculaire et de la stabilité ordinaire; j'en vais rappeler les principaux résultats, en donnant sur un point des compléments qui me seront utiles dans la suite.

Supposons que la position du système envisagé par rapport aux axes mobiles soit définie par n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, choisies de telle sorte que l'équilibre ait lieu pour:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Si l'on dérange très peu le système de sa position d'équilibre, les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seront très petites et, si l'on néglige les carrés de ces quantités, les équations différentielles qui en définiront les variations seront linéaires.

On trouvera donc:

$$x_i = \sum_m A_m[i, m]e^{\lambda_m t}, \qquad [i = 1, 2, \ldots, n; \; m = 1, 2, \ldots, 2n].$$

Dans cette formule les A_m sont des constantes d'intégration, les $[i, m]$ et les λ_m sont des constantes qu'il est aisé de déduire des équations différentielles du problème.

Si tous les λ_m sont purement imaginaires, il y a stabilité. Si tous les λ_m ont leur partie réelle nulle ou négative, il y a encore stabilité (et ce cas peut se présenter si l'on tient compte des résistances passives, telles que la viscosité des liquides). Si enfin un des λ_m a sa partie réelle positive, il y a instabilité.

Les λ_m sont donnés par une équation algébrique de degré $2n$, de sorte que pour trouver les conditions de stabilité, il suffit de discuter cette équation en λ.

Nous supposerons que toutes les forces réelles auxquelles le système est soumis sont les actions mutuelles de ses parties, de telle sorte que le moment de la quantité de mouvement du système soit constant. Parmi ces forces réelles, nous distinguerons les forces indépendantes de la vitesse qui devront admettre une fonction des forces, et les forces dépendantes de la vitesse, c'est à dire les résistances passives dues à la viscosité. Le travail de ces dernières forces doit toujours être négatif.

Outre les forces réelles, le système sera soumis à deux sortes de forces apparentes: la force centrifuge ordinaire, indépendante de la vitesse, et la force centrifuge composée, dépendante de la vitesse; le travail de cette dernière est toujours nul.

Soit T la demi-force vive et U l'énergie potentielle due à toutes les forces indépendantes de la vitesse, y compris la force centrifuge ordinaire. Si nous négligeons, comme il convient de le faire, les puissances supérieures des x et si nous supposons que U soit nul dans la position d'équilibre, T sera une forme quadratique par rapport aux:

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt}$$

et U une forme quadratique par rapport aux x_i.

Nous poserons selon l'usage:

$$p_i = \frac{dT}{dx'_i}$$

de sorte que les équations différentielles s'écriront:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{dU}{dx_i} + V_i, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dT}{dp_i}.$$

Dans ces équations les V_i représentent l'ensemble des termes provenant des forces dépendantes de la vitesse. Si l'on néglige les puissances supérieures des x, les V seront linéaires par rapport aux p. Les équations différentielles seront donc linéaires.

Dans le cas de l'équilibre absolu, c'est à dire si le mouvement de rotation est nul, il faut et il suffit pour la stabilité, que la fonction des forces soit un maximum, c'est à dire que la forme quadratique U soit définie positive.

Cette condition est encore suffisante, mais elle n'est plus nécessaire, s'il y a un mouvement de rotation. Ainsi, pour parler le langage des paragraphes précédents, si tous les coëfficients de stabilité sont négatifs, il y aura certainement stabilité, même dans le cas d'un mouvement de rotation.

Dans un très grand nombre de problèmes, on peut negliger la viscosité; si dans cette hypothèse l'équilibre relatif est stable, il y aura stabilité ordinaire; si l'équilibre reste stable quand on tient compte de la viscosité, il y aura stabilité séculaire.

Il peut y avoir stabilité ordinaire sans qu'il y ait stabilité séculaire; il arrive alors, si la viscosité est très faible, ce qui est souvent le cas, que la figure du système se maintiendra pendant fort longtemps, mais finira toujours par être bouleversée.

Pour qu'il y ait stabilité séculaire, il faut et il suffit que la forme U soit définie positive, c'est à dire que tous les coëfficients de stabilité soient négatifs.

Les conditions de la stabilité ordinaire sont beaucoup plus compliquées. Bornons-nous à dire que cette stabilité ne pourra jamais avoir lieu si le nombre des coëfficients de stabilité qui sont positifs est impair.

Tels sont les résultats très précis que l'on trouve démontrés dans l'ouvrage de MM. Tait et Thomson. Il y a toutefois une importante restriction à faire et sur laquelle je désirerais attirer l'attention. L'argumentation de MM. Tait et Thomson repose tout entière sur cette hypo-

thèse que le travail de la viscosité est toujours négatif (et non pas nul) pour tous les mouvements possibles. Il n'en est pas toujours ainsi.

Supposons par exemple une masse fluide isolée dans l'espace. Si cette masse se déplace sans se déformer, ce mouvement ne sera contrarié par aucune résistance passive analogue à la viscosité. Le travail de la viscosité sera alors nul et non pas négatif. Nous devons donc, si nous voulons appliquer le théorème de MM. TAIT et THOMSON, supposer qu'on a introduit dans le système des liaisons telles que la masse fluide ne puisse se déplacer sans se déformer. Si l'on fait cette hypothèse, la proposition est applicable, et l'on peut dire que les conditions de stabilité sont les mêmes si l'on tient compte *à la fois* de la viscosité et de la force centrifuge composée, ou bien si l'on néglige *à la fois* ces deux forces.

Avant de terminer ce qui concerne cette stabilité de l'équilibre relatif, je dois examiner un cas particulier. Supposons qu'à l'état de l'équilibre relatif, le système envisagé affecte une figure de révolution autour de l'axe des z. Pour simplifier l'exposition, nous supposerons qu'à l'état d'équilibre, toute la matière du système soit uniformément répartie sur n circonférences parallèles dont les rayons seront $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Soit m une molécule appartenant au parallèle de rayon r_i. Supposons que l'on déplace cette molécule de telle façon que sa distance au plan des xy augmente de z_i, sa distance à l'axe des z augmente de u_i et qu'enfin le dièdre du plan moz avec le plan xoz augmente de $\frac{v_i}{r_i}$. Si les quantités u_i, z_i et v_i sont les mêmes pour toutes les molécules d'une même parallèle, le système affectera encore après cette déformation, une figure de révolution. Si l'on suppose de même que $\frac{du_i}{dt} = u_i'$, $\frac{dv_i}{dt} = v_i'$, $\frac{dz_i}{dt} = z_i'$ sont les mêmes pour toutes les molécules d'un même parallèle, la demi-force vive totale du système a pour valeur:

$$T = \Sigma A_i(u_i'^2 + v_i'^2 + z_i'^2)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant n constantes que nous regarderons comme données. Enfin l'énergie potentielle U ne dépendra que des u et des z, tant que les quantités u_i, v_i et z_i conserveront la même valeur tout le long d'un parallèle. Les équations du mouvement seront alors, en supprimant toute viscosité:

$$A_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} = -\frac{dU}{du_i} - 2A_i\omega \frac{dv_i}{dt}$$

$$A_i \frac{d^2 v_i}{dt^2} = 2A_i\omega \frac{du_i}{dt}, \qquad A_i \frac{d^2 z_i}{dt} = -\frac{dU}{dz_i}$$

ω désignant la vitesse angulaire de rotation due au mouvement d'entraînement. Ces équations sont linéaires en u_i, v_i et z_i. On y satisfera en posant:

$$u_i = a_i \cos \lambda t, \qquad z_i = b_i \cos \lambda t, \qquad v_i = 2a_i \frac{\omega}{\lambda} \sin \lambda t$$

et une condition nécessaire pour qu'il y ait stabilité, c'est que les valeurs de λ qui permettent de satisfaire de la sorte à nos équations différentielles soient toutes réelles. On voit par ces équations que si les conditions initiales du mouvement sont telles que u_i, v_i, z_i, u'_i, v'_i, z'_i soient les mêmes tout le long d'un parallèle, il en sera encore de même au bout d'un temps quelconque et le système restera de révolution.

On pourra trouver pour λ un certain nombre de valeurs distinctes que j'appellerai $\pm \lambda_1$, $\pm \lambda_2$, ... et l'intégrale générale des équations proposées en supposant que le système reste de révolution sera:

$$u_i = \sum_p B_p a_{ip} \cos(\lambda_p t + \varepsilon_p)$$

(2) $$z_i = \sum_p B_p b_{ip} \cos(\lambda_p t + \varepsilon_p)$$

$$v_i = 2\omega \sum_p B_p \frac{a_{ip}}{\lambda_p} \sin(\lambda_p t + \varepsilon_p)$$

les B_p et les ε_p étant $2p$ constantes d'intégration.

Mais on doit avoir:

$$T + U = C$$

C étant une constante. Il est facile de voir que si U n'est pas une forme définie positive, on peut choisir les conditions initiales du mouve-

ment de telle sorte que la constante C ait le signe que l'on veut. On trouve:

$$T = D_0 + \sum D_p \cos 2(\lambda_p t + \varepsilon_p) + \sum D_{pq} \cos[(\lambda_p + \lambda_q)t + \varepsilon_p + \varepsilon_q]$$
$$+ \sum D'_{pq} \cos(\lambda_p t - \lambda_q t + \varepsilon_p - \varepsilon_q)$$

$$U = E_0 + \sum E_p \cos 2(\lambda_p t + \varepsilon_p) + \sum (E_{pq} \text{ ou } E'_{pq}) \cos[(\lambda_p \pm \lambda_q)t + \varepsilon_p \pm \varepsilon_q].$$

On a donc:

$$D_0 + E_0 = C, \qquad D_p + E_p = 0, \qquad D_{pq} + E_{pq} = 0, \qquad D'_{pq} + E'_{pq} = 0.$$

On trouve d'ailleurs en faisant attention à la nature des formes T et U et à la forme des équations (2):

$$D_0 = \sum_p B_p^2 D_p$$

$$2E_0 = \sum_{ip} B_p^2 A_i(\lambda_p^2 a_{ip}^2 + \lambda_p^2 b_{ip}^2 + 4\omega^2 a_{ip}^2)$$

$$2E_p = -\sum_i A_i(\lambda_p^2 a_{ip}^2 + \lambda_p^2 b_{ip}^2 - 4\omega^2 a_{ip}^2).$$

On tire de là:

$$D_0 + E_0 - \sum B_p^2(D_p + E_p) = \sum B_p^2 A_i \lambda_p^2 (a_{ip}^2 + b_{ip}^2) \tag{3}$$

et d'autre part:

$$D_0 + E_0 - \sum B_p^2(D_p + E_p) = C.$$

Les coëfficients A_i sont essentiellement positifs. Si donc les λ_p sont tous réels, le second membre de (3) est essentiellement positif. Mais nous avons vu que C peut devenir négatif à moins que la forme U ne soit définie positive. Si donc cette forme n'est pas définie positive (au moins tant que le système est assujetti à rester de révolution) il ne peut y avoir stabilité.

Cette démonstration se trouve, sauf la forme et les notations, dans la *Mécanique Céleste* de Laplace, Livre IV, Chapitre II, n° 14.

On doit donc conclure que si un système affecte, à l'état d'équilibre relatif, une figure de révolution, cet équilibre ne jouira pas même de la stabilité ordinaire, si l'équilibre du système n'est pas stable quand on

supprime la force centrifuge composée et qu'on introduit des liaisons assujettissant le système à rester de révolution *autour de l'axe des z*. Il faut toutefois observer à quelle condition ce théorème de Laplace est applicable. Il pourrait se faire que l'un des λ fût nul et alors le raisonnement précédent tomberait de lui-même. Il pourrait y avoir encore stabilité en ce sens que la figure extérieure du système demeurerait toujours très peu différente de la figure primitive; mais les divers parallèles tendraient à tourner avec des vitesses différentes.

Il reste à examiner si les théorèmes établis dans les paragraphes précédents subsistent encore dans le cas de l'équilibre relatif. Le premier d'entre eux, d'après lequel, si un des coëfficients de stabilité change de signe quand on suit une série linéaire de figures d'équilibre, la forme correspondante est de bifurcation, subsiste évidemment, car le mouvement de rotation et la force centrifuge composée ne changent pas les conditions d'équilibre et n'ont d'influence que sur les conditions de stabilité.

Quant au second théorème, c'est à dire au principe de l'échange des stabilités, il subsiste encore en ce qui concerne la stabilité séculaire dont les conditions ne sont pas non plus changées par la force centrifuge composée.

Il subsiste même en ce qui concerne la stabilité ordinaire, mais seulement à la condition qu'un seul des coëfficients de stabilité s'annule à la fois. Nous avons vu en effet qu'il ne peut y avoir même stabilité ordinaire quand un seul coëfficient de stabilité (ou plus généralement un nombre impair de ces coëfficients) est positif et les autres négatifs.

§ 8. *Fonctions de Lamé.*

Après ces longs prolégomènes, j'arrive à l'objet principal de ce travail.

Nous nous occupons de déterminer la forme d'équilibre d'une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi de Newton et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des z. Si nous ne nous occupons que des conditions d'équilibre en laissant de côté la question de stabilité, nous n'avons pas à tenir compte de la force centrifuge composée, et nous pouvons traiter le problème comme s'il s'agissait de l'équilibre absolu d'une masse fluide

soumise seulement à l'attraction newtonienne et à la force centrifuge ordinaire.

Nous connaissons déjà plusieurs séries linéaires réelles de figures d'équilibre, ce sont les ellipsoïdes de révolution et les ellipsoïdes de Jacobi. La figure de ces ellipsoïdes dépend de la vitesse angulaire de rotation ω qui jouera ici le même rôle que jouait le paramètre y dans les paragraphes 2, 3 et 4.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, imposer à notre masse fluide certaines liaisons. L'axe de révolution que nous avons pris pour axe des z, peut être regardé comme fixe. Nous regarderons également comme fixe le centre de gravité de la masse. Cela ne suffit pas encore pour notre objet; si l'on se bornait là en effet, on pourrait faire tourner l'ellipsoïde de Jacobi d'un angle quelconque autour de l'axe des z sans que l'équilibre cesse. On aurait donc pour chaque valeur de ω une infinité d'ellipsoïdes à trois axes inégaux qui satisferaient à la question. Afin d'éviter cette circonstance, qui sans pouvoir causer de véritables difficultés, nous gênerait dans l'exposition, nous assujettirons notre système à une liaison de plus, en supposant que le plan des xz soit un des trois plans principaux d'inertie. Il résultera de cette hypothèse que si un ellipsoïde à trois axes inégaux satisfait à la question, ses trois axes d'inertie seront les trois axes de coordonnées, et de plus le même ellipsoïde satisfera encore à la question quand on l'aura fait tourner de 90° autour de l'axe des z.

Dans ces conditions, voici les résultats bien connus de la discussion des équations d'équilibre.

Quand ω^2 croît depuis 0 jusqu'à $4\pi \times 0{,}093$, il y a quatre ellipsoïdes qui satisfont à la question, à savoir deux ellipsoïdes de révolution et deux ellipsoïdes de Jacobi. Ces deux derniers ne diffèrent l'un de l'autre que par leur position, et on passe de l'un à l'autre par une rotation de 90° autour de l'axe des z.

Pour $\omega^2 = 4\pi \times 0{,}093$, les deux ellipsoïdes de Jacobi se confondent entre eux et avec un des deux ellipsoïdes de révolution que nous appellerons l'ellipsoïde E.

Quand ω^2 croît de $4\pi \times 0{,}093$ à $4\pi \times 0{,}112$, il y a deux ellipsoïdes de révolution qui satisfont à la question.

Pour $\omega^2 = 4\pi \times 0,112$ les deux ellipsoïdes de révolution se confondent en un seul E'.

Pour $\omega^2 > 4\pi \times 0,112$, il n'y a plus d'ellipsoïde satisfaisant à la question.

Pour parler le langage des premiers paragraphes, il y a quatre séries linéaires de figures réelles d'équilibre depuis $\omega^2 = 0$, jusqu'à $\omega^2 = 4\pi . 0,09$; il n'y en a plus que deux depuis $\omega^2 = 4\pi . 0,09$ jusqu'à $\omega^2 = 4\pi . 0,11$, et il n'y en a plus du tout à partir de cette dernière valeur.

L'ellipsoïde E' est une forme limite puisque, en faisant croître ω^2, on voit les deux ellipsoïdes réels de révolution se confondre avec E' pour devenir ensuite imaginaires.

L'ellipsoïde E est à la fois une forme de bifurcation, (puisqu'il appartient à la fois à la série des ellipsoïdes de révolution et à la série des ellipsoïdes de Jacobi) et une forme limite, (puisque, en faisant croître ω^2, on voit les deux ellipsoïdes réels de Jacobi se confondre avec E pour devenir ensuite imaginaires.

Outre les ellipsoïdes, on sait qu'il existe des figures annulaires d'équilibre, dont nous avons parlé dans le paragraphe 5. Nous nous proposons de rechercher s'il existe en outre des séries linéaires de figures convexes d'équilibre non ellipsoïdales. Pour cela nous chercherons à reconnaître si parmi les ellipsoïdes de révolution et ceux de Jacobi, il y a des formes de bifurcation.

Pour arriver à ce résultat, il faut calculer les coëfficients de stabilité de ces ellipsoïdes et rechercher dans quels cas ils s'annulent. On verra plus loin que ces coëfficients dépendent des fonctions de Lamé, mais nous allons d'abord rappeler les résultats si remarquables des travaux de Lamé et de Liouville au sujet de ces fonctions.

Nous emploierons dans ce qui va suivre les notations de Liouville dans ses lettres à Brachet (Journal de mathématiques pures et appliquées, 1ère série, T. XI, 1846). Rappelons ces notations.

On donne à l'équation de l'ellipsoïde considéré la forme:

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1 \qquad (c^2 > b^2)$$

et on définit la position d'un point sur cet ellipsoïde par les deux autres coordonnées elliptiques μ et ν.

Une fonction de Lamé d'ordre n est une fonction R de l'une des 4 formes:

$$R = P_n, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\,P_{n-1}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - c^2}\,P_{n-1}$$
$$R = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\,P_{n-2}$$

(où P_n désigne un polynôme de degré n en ρ) et satisfaisant à l'équation différentielle:

$$(1)\quad (\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + (2\rho^2 - b^2 - c^2)\rho\frac{dR}{d\rho} = [n(n+1)\rho^2 - B]R$$

(B étant une constante convenablement choisie).

Avant d'aller plus loin, indiquons quelles sont les diverses formes qu'il peut être utile de donner à l'équation (1).

Nous poserons:

$$\rho_1 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad \rho_2 = \sqrt{\rho^2 - c^2}$$

$$R = \rho T_0 = \rho_1 T_1 = \rho_2 T_2 = \rho_1\rho_2 U_0 = \rho\rho_2 U_1 = \rho\rho_1 U_2.$$

L'équation peut alors se mettre sous la forme générale:

$$(1')\qquad (\sigma^4 + p\sigma^2 + q)\frac{d^2V}{d\sigma^2} + (\alpha\sigma^2 + \beta)\sigma\frac{dV}{d\sigma} = (H\sigma^2 + K)V.$$

Dans cette équation générale, σ représente l'une des variables ρ, ρ_1 ou ρ_2, et V l'une des sept fonctions R, T ou U. On a d'ailleurs:

$$\alpha = 2, \qquad H = n(n+1), \qquad \text{si } V = R$$
$$\alpha = 4, \qquad H = n(n+1) - 2, \qquad \text{si } V = T$$
$$\alpha = 6, \qquad H = n(n+1) - 2, \qquad \text{si } V = U.$$

D'autre part:

$$p = -(b^2 + c^2), \qquad q = b^2c^2, \qquad \text{si } \sigma = \rho$$
$$p = 2b^2 - c^2, \qquad q = -b^2(c^2 - b^2), \qquad \text{si } \sigma = \rho_1$$
$$p = 2c^2 - b^2, \qquad q = c^2(c^2 - b^2), \qquad \text{si } \sigma = \rho_2.$$

D'ailleurs:

$$\beta = p, \qquad \text{si } V = R$$

$$\beta = p - 2c^2, \qquad \text{si } V = T_1, \qquad \sigma = \rho \text{ etc.}$$

$$\beta = 3p, \qquad \text{si } V = U.$$

Enfin on trouve:

$$K = -B, \qquad \text{si } V = R, \quad \sigma = \rho$$

$$K = -(B - c^2), \qquad \text{si } V = T_1, \quad \sigma = \rho$$

$$K = -(B - q), \qquad \text{si } V = U_0, \quad \sigma = \rho$$

$$K = -[B + n(n + 1)b^2], \qquad \text{si } V = R, \quad \sigma = \rho_1 \text{ etc.}$$

Pour achever de définir la fonction R, nous supposerons:

$$\lim \frac{R}{\rho^n} = 1, \qquad \text{pour } \rho = \infty.$$

A chaque fonction R correspondent deux fonctions M et N que l'on obtient en changeant dans R, ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en μ, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$ et $\sqrt{c^2 - \mu^2}$, en ce qui concerne M, et en ν, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{c^2 - \nu^2}$ en ce qui concerne N.

A chaque fonction R correspondra en outre une fonction S de ρ définie par l'équation:

$$S = (2n + 1)R \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}$$

et satisfaisant comme R à l'équation (1).

Liouville pose de plus:

$$l = \frac{P}{\rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho - c^2)}} = \frac{h}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}};$$

P est la distance du centre de l'ellipsoïde au plan tangent.

Liouville trouve ainsi les équations suivantes:

$$(2) \qquad \iint \frac{l' M' N' d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi RSMN}{2n + 1}.$$

Dans cette équation (2) on considère deux points de l'ellipsoïde ayant pour coordonnées elliptiques ρ, μ, ν et ρ, μ' et ν'; M, N et l sont les fonctions définies plus haut de μ et de ν; M', N' et l' sont les fonctions correspondantes de μ' et de ν'; Δ est la distance des deux points μ, ν et μ', ν'; $d\omega'$ est un élément de la surface de l'ellipsoïde ayant pour centre le point μ', ν' et l'intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega'$ de l'ellipsoïde.

Liouville trouve encore:

$$\iint lMNM_1N_1 d\omega = 0 \tag{3}$$

où $d\omega$ est un élément de l'ellipsoïde; l, M, N, M_1 et N_1 les fonctions définies plus haut des coordonnées μ et ν du centre de cet élément. M et N sont deux fonctions de Lamé conjuguées; M_1 et N_1 sont deux autres fonctions de Lamé également conjuguées, mais qui doivent être différentes des premières.

Liouville démontre de plus que la fonction R est constamment positive et croissante quand ρ varie depuis $+c$ jusqu'à $+\infty$. Pour les valeurs $\rho = 0$, $\rho = \pm b$, $\rho = \pm c$, une des deux fonctions R ou $\frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$ doit s'annuler.

Il me reste à parler des équations qui déterminent la constante B.

Cherchons quelle est la condition pour que l'équation (1') soit satisfaite par un polynôme de degré λ, (où $\lambda = n$, si $V = R$; ou $n - 1$ si $V = T$; ou $n - 2$ si $V = U$).

Posons à cet effet:

$$V = \sigma^\lambda + \gamma_1\sigma^{\lambda-2} + \gamma_2\sigma^{\lambda-4} + \ldots + \gamma_\varkappa\sigma^{\lambda-2\varkappa}.$$

Nous prendrons $\lambda = 2\varkappa$ si λ est pair et $\lambda = 2\varkappa + 1$ si λ est impair. Nous trouverons alors en substituant ce polynôme à la place de V dans l'équation (1') et identifiant les deux membres:

$$\tag{4} \begin{aligned} &\Phi\gamma_{i+1} + (\lambda\Psi - k)\gamma_i + q\Theta\gamma_{i-1} = 0 \\ &\Phi = (\lambda - 2i - 2)(\lambda - 2i + \alpha - 3) - H \\ &\Psi = p(\lambda - 2i)\left(\lambda - 2i - 1 + \frac{\beta}{p}\right) \\ &\Theta = (\lambda - 2i + 2)(\lambda - 2i + 1) \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

L'équation (4) est une sorte de relation de récurrence qui permet de calculer de proche en proche les coëfficients γ, en partant des valeurs initiales $\gamma_0 = 1$, $\gamma_{-1} = 0$. On trouve ainsi γ_i sous la forme d'un polynôme de degré i en k. Comme on doit avoir $\gamma_{x+1} = 0$, la valeur de k (et par conséquent celle de B) se trouve donnée par une équation algébrique de degré $x + 1$.

Nous avons vu plus haut que la fonction R peut prendre l'une des quatre formes

$$R = P_n, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\, P_{n-1}$$

$$R = \sqrt{\rho^2 - c^2}\, P_{n-1}, \qquad R = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, P_{n-2}.$$

A ces quatre formes correspondront quatre équations en B qui seront respectivement de degré

$$\frac{n}{2} + 1, \qquad \frac{n}{2}, \qquad \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n}{2}$$

si n est pair, et de degré

$$\frac{n+1}{2}, \qquad \frac{n+1}{2}, \qquad \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{2}$$

si n est impair et que j'appellerai pour abréger (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4). Pour former l'une de ces quatre équations, on formera l'équation (1') de façon que la fonction V doive être un polynôme entier et on en déduira les équations (4) correspondantes. Il est à remarquer que chacune de ces quatre équations peut être ainsi construite de trois manières différentes. En effet, pour chacune de ces quatre formes de la fonction R on peut écrire l'équation (1') de trois manières différentes, selon que l'on choisit pour variable indépendante ρ, ρ_1 ou ρ_2.

Lamé a démontré que ces quatre équations (E) ont toutes leurs racines réelles. Liouville, en rappelant ce résultat, ajoute que la méthode de Sturm y aurait conduit plus rapidement. Comme il ne donne pas d'autre détail, il ne sera peut-être pas inutile d'éclaircir sa pensée par quelques explications.

Si on revient aux équations (4), on verra que le coëfficient Φ y est toujours négatif et le coëfficient θ toujours positif. Si donc on

suppose que q soit négatif, les fonctions γ_i qui sont, comme on l'a vu, des polynômes entiers de degré i en B, jouissent de la propriété caractéristique des fonctions de STURM, c'est à dire que, quand γ_i s'annule, γ_{i+1} et γ_{i-1} sont de signes contraires. On voit de plus que si le coëfficient de k^i dans γ_i est positif, le coëfficient de k^{i+1} dans γ_{i+1} sera négatif et réciproquement. On peut donc appliquer le raisonnement de STURM à la suite:

$$\gamma_{x+1}, \gamma_x, \ldots, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_0.$$

Mais on peut toujours supposer que q est négatif; il suffit pour cela de prendre ρ_1 pour variable indépendante. C'est ainsi que la méthode de STURM est applicable aux équations qui nous occupent.

D'ailleurs, si q est négatif, et si l'on élimine les γ entre les équations (4) par le moyen d'un déterminant, l'équation (E) ainsi obtenue aura la même forme que »l'équation en S» que l'on rencontre quand on recherche les axes principaux d'une surface du 2[d] ordre.

Voici une autre démonstration du même théorème, que je crois nouvelle et qui pourra nous être utile.

Dans le cas de $b^2 = c^2$, on a ainsi que LIOUVILLE l'a montré:

$$B = [n(n+1) - i^2]c^2 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n)$$

$$R = \frac{(\rho^2 - c^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{d^{i+n}(\rho^2 - c^2)^n}{d\rho^{i+n}}.$$

Dans le cas de $b^2 = 0$, on a:

$$B = i^2c^2 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n)$$

$$R = \frac{(\rho_2^2 + c^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{d^{i+n}(\rho_2^2 + c^2)}{d\rho^{i+n}}.$$

Ainsi pour $b^2 = c^2$ les racines des équations E_1 et E_4 sont:

$$n(n+1)c^2, \qquad [n(n+1) - 4]c^2, \quad \text{etc.,} \quad [n(n+1) - 4k^2]c^2, \qquad (2k \leqq n)$$

et celles des équations E_2 et E_3 sont:

$$[n(n+1) - 1]c^2, \qquad [n(n+1) - 9]c^2, \quad \text{etc.,} \quad [n(n+1) - (2k+1)^2]c^2,$$

$$(2k + 1 \leqq n).$$

Ainsi si l'on envisage seulement les équations E_1 et E_2 par exemple, les racines de ces deux équations seront toutes réelles et se sépareront mutuellement.

Faisons varier b^2 d'une manière continue depuis sa limite supérieure c^2 jusqu'à sa limite inférieure o. Les racines des deux équations E_1 et E_2 varieront d'une manière continue. Pour qu'elles cessassent d'être toutes réelles, il faudrait que deux racines de E_1 ou deux racines de E_2 devinssent égales. Mais pour que cela fût possible, il faudrait d'abord que les racines des deux équations cessassent de se séparer mutuellement. Pour qu'elles cessassent de se séparer, il faudrait que l'une des racines de E_1 devînt égale à une des racines de E_2.

Or je dis que cela est impossible. Soit en effet B une racine que nous supposons appartenir à la fois à E_1 et à E_2 et envisageons l'équation (1) correspondante.

Cette équation admettra deux intégrales, l'une de la forme P_n, l'autre de la forme $\sqrt{\rho^2 - c^2}P_{n-1}$. Soient R et R_1 ces deux intégrales. On peut former une équation linéaire du 3e ordre, à coëfficients rationnels et admettant pour intégrales les carrés des intégrales de (1). Un système fondamental d'intégrales sera:

$$R^2,\ RR_1 \text{ et } R_1^2.$$

Cette équation admettrait donc comme intégrales deux polynômes entiers R^2 et R_1^2 *essentiellement distincts.*

Mais l'équation (1) admet, outre l'intégrale R, l'intégrale S définie plus haut et qui est telle que:

$$\lim S\rho^{n+1} = 1, \qquad \text{pour } \rho = \infty.$$

L'équation du 3me ordre dont nous venons de parler admettra donc comme système fondamental d'intégrales:

$$R^2, \qquad RS, \qquad S^2.$$

Si nous convenons de dire qu'une fonction F de ρ est de degré p en ρ si le rapport de F à ρ^p tend vers une limite finie quand ρ croît indéfiniment, il résulte de ce qui précède que les trois intégrales R^2, RS et S^2 sont respectivement de degré $2n$, -1 et $-(2n+2)$. Une intégrale

quelconque de l'équation du 3^{me} ordre sera une combinaison linéaire de R^2, RS et S^2; elle sera donc, à moins d'être identiquement nulle, de l'un des trois degrés $2n$, -1 et $-(2n+2)$.

Or $R^2 - R_1^2$ qui est une de ces intégrales, ne peut être ni de degré -1, ni de degré $-(2n+2)$ puisque c'est un polynôme entier; ni de degré $2n$, puisque le premier terme de R^2 est ρ^{2n} de même que le premier terme de R_1^2, de sorte que les termes de degré $2n$ disparaissent dans $R^2 - R_1^2$. Il faut donc que:

$$R^2 - R_1^2 = 0$$

ou

$$R = R_1$$

ce qui est impossible et contraire aux hypothèses faites plus haut. Nous devons donc conclure que les racines des équations E_1 et E_2 sont toutes réelles et se séparent mutuellement, quelle que soit la valeur de b^2.

Cela va nous permettre de distinguer les unes des autres les diverses fonctions R.

Nous écrirons:

$$R_{n,i}^{(k)}.$$

L'indice supérieur k sera égal à 1, 2, 3 ou 4 selon que R sera de la forme

$$P_n, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\rho^2 - b^2}\, P_{n-1}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\rho^2 - c^2}\, P_{n-1}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, P_{n-2}.$$

L'indice n indiquera le degré de la fonction R, enfin l'indice i devra être choisi de telle sorte que $R_{n,i}$ se réduise à:

$$A(\rho^2 - c^2)^{\frac{i}{2}} D^{i+n} (\rho^2 - c^2)^n$$

pour $b^2 = c^2$, A désignant un coëfficient constant dont on trouvera plus haut la valeur, et le signe D^{i+n} exprimant qu'on doit effectuer $i + n$ différentiations par rapport à ρ.

On voit aisément d'après ce qui précède que la fonction $R_{n,i}^{(k)}$ est parfaitement déterminée. Pour $b^2 = 0$ on trouve:

$$R_{n,i}^{(k)} = A(\rho_2^2 + c^2)^{\frac{j}{2}} D^{j+n} (\rho_2^2 + c^2)^n$$

où j a une valeur que nous allons déterminer.

On voit aisément que i est pair si $k = 1$ ou 4 et impair si $k = 2$ ou 3; tandis que j est de même parité que n, si $k = 1$ ou 2 et de parité différente si $k = 3$ ou 4. De plus, pour une même valeur de k, les valeurs de j devront croître quand celles de i décroîtront. On a donc:

$$\text{si } k = 1 \text{ ou } 3, \qquad i + j = n$$

$$\text{si } k = 2 \text{ ou } 4, \qquad i + j = n + 1.$$

Nous pouvons déduire de là quelques propriétés des fonctions R. Combien l'équation:

$$(5) \qquad R_{n,i}^{(k)} = 0$$

(où le premier membre est supposé débarrassé du facteur radical $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ et $\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$, qu'il pourrait contenir, ainsi que du facteur ρ s'il y a lieu) aura-t-elle de racines réelles et comment ces racines seront elles distribuées? Nous prendrons pour inconnue ρ^2 et non pas ρ. Faisons d'abord $b^2 = c^2$. On verra que l'équation admettra ξ racines égales à c^2 et η racines comprises entre 0 et c^2.

Si nous faisons ensuite $b^2 = 0$, on verra que l'équation admettra ξ' racines égales à 0 et η' comprises entre 0 et c^2.

Les valeurs des nombres ξ, η, ξ' et η' nous seront données par le tableau suivant, où la première colonne donne la valeur de k, la seconde le reste de n à 2 et les quatre autres les valeurs des quatre nombres: $i - 2\xi$, $n - i - 2\eta$, $j - 2\xi'$, $n - j - 2\eta'$.

1	0	0	0	0	0.
1	1	0	1	1	0
2	0	1	1	2	0
2	1	1	0	1	0
3	0	1	1	1	1
3	1	1	0	0	1
4	0	2	0	1	1
4	1	2	1	2	1

Ce tableau montre que l'on a toujours:

$$\xi = \eta', \qquad \xi' = \eta.$$

Qu'arrive-t-il maintenant pour les valeurs de b^2 comprises entre 0 et c^2? Pour une pareille valeur, l'équation ne peut avoir de racine multiple, car si pour une certaine valeur de ρ, R et $\frac{dR}{d\rho}$ s'annulaient à la fois, le coëfficient de $\frac{d^2R}{d\rho^2}$ dans l'équation (1) devrait être nul également, ce qui entraînerait:

$$\rho^2 = b^2 \quad \text{ou} \quad c^2.$$

D'autre part aucune des racines de l'équation ne peut être égale à 0, à b^2 ou à c^2; car si l'on forme l'équation déterminante de l'équation (1) pour les points $\rho = \pm b$, $\rho = \pm c$, on trouve que les racines de cette équation déterminante sont 0 et $\frac{1}{2}$. D'ailleurs, comme on a supposé qu'on enlevait dans l'équation (5) le facteur ρ s'il s'y trouvait, il ne pourrait arriver qu'il y restât ensuite, que s'il y entrait au carré avant qu'on ne l'eût enlevé. Or nous venons de voir que cela ne peut être.

On doit donc conclure que lorsque b^2 décroît depuis c^2 jusqu'à 0, l'équation (5) aura ξ_1 racines réelles entre 0 et b^2 et η_1 racines réelles entre b^2 et c^2 et que ces deux nombres ξ_1 et η_1 demeureront invariables.

Pour $b^2 = c^2$, il arrivera que les η_1 racines comprises entre b^2 et c^2 deviendront égales à c^2; on pourrait supposer aussi qu'un certain nombre de racines d'abord imaginaires, ou non comprises entre b^2 et c^2 tendent aussi vers c^2 quand b^2 tend vers c^2, de sorte qu'on aura:

$$\eta_1 \leqq \xi.$$

Quant aux ξ_1 racines comprises entre 0 et b^2, elles resteront comprises entre 0 et c^2; on pourrait supposer toutefois que quelques unes d'entre elles se réduisent à c^2; on aura donc

$$\xi_1 \geqq \eta.$$

Supposons maintenant que b^2 tende vers 0; il arrivera que les ξ_1 racines et peut-être d'autres tendront vers 0, et que les η_1 racines, comprises

entre ces mêmes limites, quelques unes d'entre elles pouvant se réduire à o. On aura donc:

$$\xi_1 \leqq \xi', \qquad \eta_1 \geqq \eta'.$$

Mais si d'autre part on observe que l'on a

$$\xi = \eta', \qquad \xi' = \eta$$

on verra qu'on doit avoir constamment

$$\eta_1 = \xi = \eta', \qquad \xi_1 = \xi' = \eta.$$

Il en résulte que l'équation (5) a toujours toutes ses racines réelles et comprises entre o et c^2; quant au nombre de racines comprises entre o et b^2, ou entre b^2 et c^2, il est donné par le tableau précédent.

Si par exemple n est pair, l'équation

$$R^{(1)}_{n,i} = 0$$

aura $\frac{n-i}{2}$ racines comprises entre o et b^2 et $\frac{i}{2}$ comprises entre b^2 et c^2. [1]

Je ne veux pas, pour le moment du moins, m'étendre plus longtemps sur les propriétés générales des fonctions de Lamé; je me bornerai à rappeler les deux résultats suivants qui sont bien connus.

En premier lieu, B est toujours compris entre o et $n(n+1)c^2$.

En second lieu, une fonction quelconque de μ et de ν, pour les valeurs de ν comprises entre o et b^2 et pour celles de μ comprises entre b^2 et c^2, peut toujours être développée en une série de la forme:

$$\Sigma A_i M_i N_i$$

où A_i désigne un coëfficient constant, pendant que M_i et N_i désignent deux fonctions de Lamé conjuguées de μ et de ν.

§ 9. *Détermination des coëfficients de stabilité.*

Considérons un ellipsoïde fluide et homogène en équilibre sous l'action de l'attraction newtonienne et de la force centrifuge. Supposons qu'il

---

[1] Ces résultats ont été donnés par M. Klein, qui y a été conduit par des considérations un peu différentes.

subsiste une déformation infiniment petite, sans que son volume change et cherchons à évaluer le travail des forces qui agissent sur le corps pendant cette déformation infiniment petite. Soit:

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1$$

l'ellipsoïde envisagé et soient μ et ν les coordonnées elliptiques qui définissent la position d'un point sur cette surface. Soit ζ la distance de l'ellipsoïde à la surface déformée comptée sur la normale à l'ellipsoïde; soit g la résultante de l'attraction et de la force centrifuge en un point de la surface de l'ellipsoïde à l'état d'équilibre; cette résultante est comme on sait normale à l'ellipsoïde. Soit enfin $d\omega$ un élément quelconque de la surface de l'ellipsoïde. Pendant la déformation, une molécule quelconque peut être regardée comme soumise à trois forces: à l'attraction de l'ellipsoïde supposé fixe, à l'attraction du bourrelet infinitésimal formé par la différence entre la surface déformée et l'ellipsoïde, et à la force centrifuge. Si nous considérons un point matériel quelconque de masse 1 et que nous appelions Δ sa distance à un élément quelconque dm' de la masse de l'ellipsoïde et r sa distance à l'axe des z; si nous posons: [1]

$$V=\int\frac{dm'}{\Delta}+\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

la variation de V mesurera précisément le travail des forces agissant sur ce point matériel et dues à l'attraction de l'ellipsoïde et à la force centrifuge, en laissant de côté l'attraction du bourrelet dont nous venons de parler.

Il résulte des hypothèses faites, que sur toute la surface de l'ellipsoïde, la fonction V a une valeur constante que nous appellerons V_0. Si au lieu d'un point situé sur l'ellipsoïde, nous envisageons un point M infiniment voisin de cette surface, nous abaisserons du point M sur l'ellipsoïde une normale MM' de longueur infiniment petite λ. La valeur de la

---

[1] On remarquera que je désigne par ω la vitesse de rotation et par $d\omega$ un élément de l'ellipsoïde; par μ une des coordonnées elliptiques et par $d\mu$ un élément du bourrelet. Il n'en peut résulter aucune confusion, puisque les différentielles de ω et de μ n'entrent pas dans le calcul.

fonction g au point M_1 sera précisément aussi la valeur de la dérivée de la fonction V, estimée suivant la normale. On aura donc au point M, en négligeant les infiniment petits du 2^d ordre

$$V = V_0 - g\lambda.$$

Quelle est maintenant l'énergie potentielle totale de la masse fluide déformée? L'énergie due à l'attraction seule aura pour expression

$$\frac{1}{2}\iint \frac{dm\,dm'}{\Delta}$$

dm et dm' étant deux éléments quelconques de la masse fluide et Δ la distance de ces deux éléments. L'énergie due à la force centrifuge sera:

$$\int \frac{\omega^2}{2} r^2 dm$$

r étant la distance de l'élément dm à l'axe des z. Le double de l'énergie potentielle totale sera donc:

$$2W = \iint \frac{dm\,dm'}{\Delta} + \int \omega^2 r^2 dm.$$

J'appellerai W_0 la valeur de W dans l'état d'équilibre, c'est à dire quand la figure de la masse fluide se réduit à l'ellipsoïde.

Mais nous devons distinguer parmi les éléments de la masse fluide, les éléments de l'ellipsoïde que j'appellerai dm et dm', et les éléments du bourrelet que j'appellerai $d\mu$ et $d\mu'$. Parmi ces éléments, il y en aura de négatifs, puisque, le volume ne changeant pas pendant la déformation, on doit avoir:

$$\int d\mu = 0.$$

On a donc

$$2W = \iint \frac{dm\,dm'}{\Delta} + \iint \frac{dm\,d\mu'}{\Delta} + \iint \frac{dm'\,d\mu}{\Delta} + \iint \frac{d\mu\,d\mu'}{\Delta}$$
$$+ \int \omega^2 r^2 dm + \int \omega^2 r^2 d\mu$$

$$2W_0 = \iint \frac{dm\,dm'}{\Delta} + \int \omega^2 r^2 dm$$

ce qui peut s'écrire:

$$2W = 2W_0 + 2\iint \frac{dm'd\mu}{\Delta} + \int \omega^2 r^2 d\mu + \iint \frac{d\mu d\mu'}{\Delta}$$

ou puisque:

$$V = \int \frac{dm'}{\Delta} + \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

on aura:

$$2W = 2W_0 + 2\int V d\mu + \iint \frac{d\mu d\mu'}{\Delta}.$$

Considérons un élément quelconque $d\omega$ de la surface de l'ellipsoïde. Menons par les divers points de cet élément des normales à l'ellipsoïde. Nous aurons ainsi déterminé une sorte de cylindre infiniment délié et dans lequel nous découperons une tranche infiniment mince en le coupant par deux plans situés à des distances λ et $\lambda + d\lambda$ du centre de l'élément $d\omega$ et parallèles au plan de cet élément. Si λ est compris entre o et ζ, la tranche ainsi découpée dans ce cylindre appartiendra à notre bourrelet; ce sera un de nos éléments $d\mu$, de sorte que nous pourrons écrire:

$$d\mu = d\lambda d\omega.$$

Nous écrirons de même:

$$d\mu' = d\lambda' d\omega'.$$

Nous aurons donc pour trouver l'expression de W à calculer les deux intégrales:

$$\int V d\lambda d\omega \quad \text{et} \quad \iint \frac{d\lambda d\omega\, d\lambda' d\omega'}{\Delta}.$$

Mais λ étant très petit, on a comme on a vu

$$V = V_0 - g\lambda$$

ce qui donne pour la première intégrale:

$$\int V_0 d\mu - \int g\lambda d\lambda d\omega.$$

Le premier terme est nul; le second peut s'écrire

$$-\int g d\omega \int_0^\zeta \lambda d\lambda$$

ou bien:

$$-\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega .$$

Il reste à calculer la seconde intégrale. Nous remarquerons que λ et λ' étant très petits, on peut considérer Δ comme représentant non pas la distance des éléments $d\mu$ et $d\mu'$, mais celle des éléments $d\omega$ et $d\omega'$ qui en diffère très peu. Δ est alors indépendant de λ et de λ' et l'on peut écrire:

$$\iint \frac{d\mu d\mu'}{\Delta} = \iint \frac{d\omega d\omega'}{\Delta} \int_0^\zeta d\lambda \int_0^{\zeta'} d\lambda' = \iint \frac{d\omega d\omega' \zeta\zeta'}{\Delta}.$$

Il reste donc finalement:

$$W = W_0 - \frac{1}{2} \int g \zeta^2 d\omega + \frac{1}{2} \iint \frac{d\omega d\omega' \zeta\zeta'}{\Delta}.$$

Avant d'aller plus loin, il faut calculer g. La force g peut être décomposée en trois composantes dirigées suivant les trois axes des x, des y et des z. La composante parallèle à l'axe des x par exemple, est parallèle à la coordonnée x du point d'application. De même pour les deux autres composantes.

Si donc on appelle α, β, γ les cosinus directeurs de la normale et k, k', k'' trois constantes, on aura:

$$g\alpha = kx, \qquad g\beta = k'y, \qquad g\gamma = k''z.$$

Mais l'équation de l'ellipsoïde est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

ce qui donne:

$$\alpha = \frac{x}{\rho^2} P, \qquad \beta = \frac{y}{\rho^2 - b^2} P, \qquad \gamma = \frac{z}{\rho^2 - c^2} P,$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2}}}.$$

On a donc:

$$g = \frac{k\rho^2}{P} = \frac{k'(\rho^2 - b^2)}{P} = \frac{k''(\rho^2 - c^2)}{P}.$$

Si nous reprenons les notations du paragraphe précédent et que nous écrivions:

$$l = \frac{P}{\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}$$

il viendra

$$g = \frac{K}{l}$$

K étant une nouvelle constante ne dépendant que de ρ, b et c.

Il reste à déterminer cette constante. Pour cela il suffit de calculer l'expression de g à l'extrémité de l'axe des z; dans ce cas, g se réduit à l'attraction de l'ellipsoïde et peut s'écrire:

$$4\pi\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{[\rho^2 - c^2 + (c^2 - b^2)u^2][\rho^2 - c^2 + c^2u^2]}}.$$

D'ailleurs ou trouve aisément:

$$l = \frac{1}{\sqrt{\rho^2(\rho^2 - b^2)}}.$$

Il vient donc, par une transformation simple de l'intégrale:

$$gl = 4\pi(\rho^2 - c^2) \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - c^2)}}.$$

La fonction $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ est une fonction de LAMÉ que nous appellerons R_1; c'est d'ailleurs la fonction que nous avions désignée dans le paragraphe précédent par la notation plus compliquée:

$$R_{1,1}^{(3)}.$$

Nous chercherons à éviter les triples indices toutes les fois qu'ils ne seront pas nécessaires et nous rangerons les fonctions de LAMÉ dans un ordre quelconque; nous les appellerons:

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_i,\ \ldots$$

Nous poserons donc:

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Si d'autre part, nous envisageons la fonction S_1 conjuguée de R_1, nous aurons:

$$S_1 = 3\sqrt{\rho^2 - c^2} \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - c^2)}}.$$

On a donc à l'extrémité de l'axe des z

$$gl = \frac{4}{3}\pi R_1 S_1$$

et comme nous avons vu plus haut que gl est une constante, nous pourrons conclure que gl conserve cette valeur sur toute la surface de l'ellipsoïde.

Développons maintenant $\frac{\zeta}{l}$ qui est une fonction de μ et de ν en une série convergente de la forme suivante:

$$\sum A_i M_i N_i$$

A_i étant des constantes et M_i, N_i des fonctions de LAMÉ. Cela est toujours possible, comme nous l'avons dit à la fin du paragraphe précédent. Nous aurons donc:

$$\zeta = \sum A_i l M_i N_i$$

et de même:

$$\zeta' = \sum A_i l' M_i' N_i'$$

On tire de là:

$$\frac{\zeta^2}{2} = \sum \frac{A_i^2}{2} l^2 M_i^2 N_i^2 + \sum A_i A_k l^2 M_i N_i M_k N_k$$

ou:

$$\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega = \sum \frac{A_i^2}{2} \int g l^2 d\omega \times M_i^2 N_i^2 + \sum A_i A_k \int g l^2 d\omega M_i N_i M_k N_k$$

ou:

$$\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega = \sum \frac{4A_i^2}{6} \pi R_1 S_1 \int l M_i^2 N_i^2 d\omega + \sum A_i A_k \frac{4}{3} \pi R_1 S_1 \int l M_i N_i M_k N_k d\omega .$$

Si l'on observe que:

$$\int l M_i N_i M_k N_k d\omega = 0$$

il reste:

$$\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega = \frac{4}{6} \pi R_1 S_1 \sum A_i^2 \int l M_i^2 N_i^2 d\omega .$$

On trouve d'autre part:

$$\iint \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega'}{\Delta} = \sum A_i A_k \iint \frac{l l' M_i N_i M'_k N'_k d\omega d\omega'}{\Delta}$$

les deux indices i et k pouvant être égaux ou différents. Mais on a:

$$\int \frac{l' M'_k N'_k d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi R_k S_k M_k N_k}{2n+1} .$$

On a donc

$$\iint \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega'}{\Delta} = \sum A_i A_k \int l M_i N_i M_k N_k d\omega \times \frac{4\pi R_k S_k}{2n+1} .$$

Si i est différent de k, on aura:

$$\int l M_i N_i M_k N_k d\omega = 0 .$$

Il reste donc:

$$\iint \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega'}{\Delta} = \sum A_i^2 \int l M_i^2 N_i^2 d\omega \times \frac{4\pi R_i S_i}{2n+1} .$$

On arrive donc finalement à l'expression suivante pour W:

$$W = W_0 - \frac{4\pi}{2} \sum A_i^2 \int \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1} \right) l M_i^2 N_i^2 d\omega;$$

n est bien entendu le degré de la fonction de LAMÉ R_i.

Nous pouvons considérer la forme de la surface déformée comme définie par les coëfficients A_i. Les coëfficients de stabilité seront alors:

$$-4\pi \int \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1} \right) l M_i^2 N_i^2 d\omega.$$

Pour qu'un des ellipsoïdes puisse être une forme de bifurcation, il faut que l'un de ces coëfficients s'annule, c'est à dire que l'on ait:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1} = 0$$

pour l'une des fonctions R_i.

D'après cela, il y a un des coëfficients qui est toujours nul, c'est celui qui correspond à $i = 1$. Cela était aisé à prévoir. En effet on peut déplacer l'ellipsoïde parallèlement à lui-même et parallèlement à l'axe de révolution sans changer l'état d'équilibre. Si l'on imprime ainsi à l'ellipsoïde un mouvement de translation infiniment petit et parallèle à l'axe des z, et si l'on appelle ζ la distance des deux ellipsoïdes infiniment voisins comptée suivant la normale, on a en négligeant les infiniment petits du 2[d] ordre:

$$\zeta = A_1 l M_1 N_1$$

A_1 étant une constante. Comme les deux ellipsoïdes sont des surfaces d'équilibre, il faut donc bien que le coëfficient de stabilité qui correspond à $i = 1$ s'annule. Y a-t-il des cas où d'autres coëfficients de stabilité s'annulent? c'est ce que nous examinerons dans les paragraphes suivants.

On peut arriver à l'équation (1) par une autre voie un peu plus simple et que j'aurais même préférée si je ne me réservais d'examiner plus loin la question de stabilité.

Supposons que l'on ajoute à l'attraction newtonienne et à la force centrifuge qui agissent sur la masse fluide, des forces perturbatrices quel-

conques, mais très petites. La masse fluide prendra alors une forme d'équilibre très peu différente de l'ellipsoïde. Cette forme sera unique si aucun des coëfficients de stabilité ne s'annule; elle sera mal déterminée en général, si l'un de ces coëfficients est nul.

Nous reprendrons les mêmes notations que plus haut et nous définirons la surface d'équilibre déformée par la valeur de ζ que nous développerons en série comme précédemment:

$$\zeta = \Sigma A_i l M_i N_i$$

les A_i étant des coëfficients infiniment petits qu'il s'agit de déterminer pour définir la nouvelle forme d'équilibre. Soit comme plus haut V le potentiel dû à l'attraction de l'ellipsoïde et à la force centrifuge, v le potentiel dû à l'attraction du bourrelet, v' le potentiel dû aux forces perturbatrices. On devra avoir sur toute la nouvelle surface d'équilibre:

$$V + v + v' = \text{const.} \tag{2}$$

Mais on a, puisque ζ est infiniment petit:

$$V = V_0 - g\zeta$$

et de plus:

$$v = \int \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta}$$

Δ étant la distance d'un point quelconque du bourrelet au point envisagé de la nouvelle surface libre; mais comme ζ est infiniment petit, on peut remplacer ces deux points par leurs projections sur l'ellipsoïde. Δ est alors la distance de deux points de l'ellipsoïde et on a:

$$v = \sum A_i \int \frac{l' M'_i N'_i d\omega'}{\Delta} = 4\pi \sum \frac{A_i R_i S_i M_i N_i}{2n + 1}.$$

Nous pouvons écrire d'ailleurs:

$$v' = \Sigma B_i M_i N_i$$

les B_i étant des coëfficients très petits que l'on peut regarder comme

donnés. L'équation (2) pourra alors s'écrire, en remplaçant g et ζ par leurs valeurs:

$$-\frac{4\pi}{3}R_1S_1\,\Sigma\,A_iM_iN_i + 4\pi\sum\frac{A_iR_iS_iM_iN_i}{2n+1} + \Sigma\,B_iM_iN_i = \text{const.}$$

Nous identifierons dans les deux membres les coëfficients de M_iN_i et il viendra:

$$4\pi A_i\left(\frac{R_1S_1}{3} - \frac{R_iS_i}{2n+1}\right) = B_i.$$

Ces équations détermineront complètement les coëfficients A_i et par conséquent la nouvelle forme d'équilibre, à moins qu'on n'ait:

$$(1)\qquad \frac{R_1S_1}{3} - \frac{R_iS_i}{2n+1} = 0.$$

C'est donc là aussi la condition pour que l'un des coëfficients de stabilité s'annule.

§ 10. *Discussion de l'équation fondamentale.*

Nous avons maintenant à rechercher si l'équation

$$(1)\qquad \frac{R_1S_1}{3} - \frac{R_iS_i}{2n+1} = 0$$

où ρ^2 est l'inconnue admet des racines comprises entre $+c^2$ et $+\infty$.

Parlons d'abord de l'équation plus générale:

$$(2)\qquad F = \frac{R_kS_k}{2m+1} - \frac{R_iS_i}{2n+1} = 0$$

n et m étant les degrés des fonctions R_i et R_k. Le premier membre F tend vers 0 quand ρ croît indéfiniment, car les fonctions R_kS_k et R_iS_i sont de degré -1 en ρ, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent. Si R_k et R_i contiennent en facteur $\sqrt{\rho^2-c^2}$, F s'annule encore pour $\rho^2 = c^2$.

On a d'ailleurs:

$$\frac{F}{R_k^2} = \frac{S_k}{R_k}\frac{1}{2m+1} - \frac{R_i^2}{R_k^2}\frac{S_i}{R_i}\frac{1}{2n+1}.$$

Les racines de l'équation:

$$\frac{F}{R_k^2} = 0 \tag{3}$$

qui sont supérieures à c^2 sont les mêmes que celles de l'équation (2); en effet R_k peut s'annuler pour $\rho^2 = c^2$, mais jamais pour $\rho^2 > c^2$.

Si nous voulons séparer les racines de l'équation (3), il suffit d'appliquer le théorème de Rolle et d'écrire que la dérivée du premier membre de (3) est nulle. On obtient ainsi l'équation:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{S_k}{(2m+1)R_k} - \frac{R_i^2}{R_k^2}\frac{d}{d\rho}\frac{S_i}{(2n+1)R_i} - \frac{S_i}{(2n+1)R_i}\frac{d}{d\rho}\frac{R_i^2}{R_k^2} = 0.$$

Mais on a, d'après la définition même des fonctions S:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{S_k}{(2m+1)R_k} = \frac{-1}{R_k^2\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}$$

$$\frac{d}{d\rho}\frac{S_i}{(2n+1)R_i} = \frac{-1}{R_i^2\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Il reste donc:

$$\frac{S_i}{(2n+1)R_i}\frac{d}{d\rho}\frac{R_i^2}{R_k^2} = 0$$

ce qui exprime que le rapport $\frac{R_i}{R_k}$ passe par un maximum ou minimum, car S_i ne peut s'annuler.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

Les racines de l'équation (2) supérieures à c^2, en laissant de côté la racine c^2 si elle existe, sont séparées par les racines de l'équation:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{R_i^2}{R_k^2} = 0$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$R_i' R_k - R_k' R_i = 0 \tag{4}$$

où

$$R_i' = \frac{dR_i}{d\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Cherchons maintenant à séparer les racines de l'équation (4) elle-même. Pour cela annulons la dérivée du 1er membre par rapport à ε. Il viendra:

$$R_i'' R_k - R_k'' R_i = 0 \tag{5}$$

où

$$R_i'' = \frac{d^2 R_i}{d\varepsilon^2}.$$

Mais l'équation (1) du paragraphe 8 peut s'écrire:

$$R_i'' = [n(n+1)\rho^2 - B_i] R_i$$

en ce qui concerne R_i, et

$$R_k'' = [m(m+1)\rho^2 - B_k] R_k$$

en ce qui concerne R_k. L'équation (5) devient ainsi, en supprimant le facteur $R_i R_k$ qui ne peut s'annuler pour les valeurs supérieures à c^2:

$$[n(n+1) - m(m+1)]\rho^2 - B_i + B_k = 0. \tag{6}$$

Il est clair qu'une pareille équation ne peut avoir qu'une racine supérieure à c^2. L'équation (4) aura donc au plus deux racines égales ou supérieures à c^2, et l'équation (2) aura au plus trois racines supérieures à c^2 (sans y comprendre la racine c^2 si elle existe, mais en y comprenant la racine ∞).

Si l'équation (4) n'a aucune racine supérieure à c^2, le rapport $\frac{R_i}{R_k}$ est toujours croissant ou toujours décroissant quand ρ^2 croit de c^2 à ∞.

Supposons par exemple qu'il soit toujours croissant. On aura alors:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{R_i^2}{R_k^2} > 0$$

d'où:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{F}{R_k^2} < 0$$

l'expression $\frac{F}{R_k^2}$ est donc toujours décroissante et comme elle tend vers 0 pour $\rho = \infty$, elle doit toujours être positive. On a donc:

$$F > 0.$$

Revenons en particulier à l'équation (1) et supposons:

$$R_k = R_1 = \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Supposons d'abord que R_i contienne en facteur $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, nous pourrons écrire:

$$R_i = \varphi \,.\, P_i \,.\, \sqrt{\rho^2 - c^2}$$

φ étant un facteur qui pourra être

$$\rho, \qquad \rho\sqrt{\rho^2 - b^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\rho^2 - b^2}$$

et P_i étant un polynôme entier en ρ^2. L'équation:

$$P_i = 0$$

n'est autre chose que l'équation (5) du paragraphe 8, débarrassée des facteurs que nous sommes convenus de lui enlever. Nous avons vu que cette équation a toutes ses racines réelles et qu'elles sont comprises entre 0 et c^2. L'équation

$$\frac{dP_i}{d(\rho^2)} = 0$$

aura donc aussi toutes ses racines réelles et comprises entre 0 et c^2; d'où il résulte que, ρ^2 croissant de c^2 à $+\infty$, P_i sera constamment croissant. Il en est de même de ρ et de $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et par conséquent de φ et de

$$\frac{R_i}{R_k} = \varphi \,.\, P_i.$$

Il en résulte que si R_i contient $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en facteur, l'équation (1) n'a aucune racine supérieure à c^2 et que son premier membre est toujours positif.

Supposons maintenant que R_i ne contienne pas $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en facteur. Quand ρ est très grand, on peut regarder $\frac{1}{\rho}$ comme un infiniment petit du 1er ordre. On a alors en négligeant les infiniment petits du 2d ordre:

$$R_1 S_1 = R_i S_i = \frac{1}{\rho}$$

d'où:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) > 0.$$

Le premier membre de (1) est donc toujours positif, à moins que n ne soit égal à 1.

Pour $\rho^2 = c^2$, $R_1 S_1$ s'annule et par hypothèse $R_i S_i$ ne s'annule pas; le premier membre est donc négatif. Ainsi la substitution de $\rho^2 = c^2$ et d'une valeur de ρ^2 positive et très grande, donne des résultats de signe contraire; le nombre des racines de l'équation (1) supérieures à c^2 et finies sera donc impair.

Or nous avons vu que le nombre des racines supérieures à c^2 était au plus égal à 3, en y comprenant la racine $\rho^2 = \infty$; si on ne tient pas compte de cette racine, le nombre des racines sera au plus égal à 2; et comme il doit être impair, il faut qu'il soit égal à 1.

Nous avons laissé de côté le cas où $n = 1$ auquel correspondent deux fonctions R_i, à savoir:

$$R_i = \rho, \qquad R_i = \sqrt{\rho^2 - b^2}.$$

Il est aisé de voir que quand ρ^2 croît depuis c^2 jusqu'à $+\infty$, les rapports:

$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}$$

vont toujours en décroissant. On doit donc conclure que l'équation (1) n'a aucune racine finie et plus grande que c^2, et que son premier membre est toujours négatif.

Voici donc en résumé quel est le nombre des racines de l'équation (1) finies et supérieures à c^2:

R_i divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; pas de racine; 1^er^ membre positif,

R_i non divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; $n > 1$; une racine,

R_i non divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; $n = 1$; pas de racine; 1^er^ membre négatif.

Renenons maintenant au cas général, et cessons de supposer que $R_k = R_1$; qu'arrive-t-il alors de l'équation (2)?

Soit d'abord $n > m$, et supposons que R_i soit divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ et que R_k ne le soit pas. On voit alors tout de suite que F est positif pour $\rho^2 = c^2$ et pour ρ^2 très grand et positif. L'équation (2) n'a donc pas de racine finie et supérieure à c^2, ou bien elle en a deux. Quant au rapport $\frac{R_i}{R_k}$ il est nul pour $\rho^2 = c^2$ et infini pour $\rho^2 = \infty$; il est donc croissant pour les valeurs de ρ^2 très peu supérieures à c^2 et pour les valeurs très grandes. Donc dans les cas où l'équation (2) a deux racines, il doit en être de même de l'équation (4) et le rapport $\frac{R_i}{R_k}$ doit présenter un maximum et un minimum.

Supposons maintenant que R_k soit divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ sans que R_i le soit. Alors pour $\rho^2 = c^2$, on a:

$$F < 0,$$

pour ρ^2 positif et très grand

$$F > 0;$$

il y a donc un nombre impair de racines, et comme ce nombre ne peut dépasser 2, il faut qu'il soit égal à 1.

Supposons maintenant que R_i et R_k soient tous deux divisibles par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ ou ne le soient ni l'un ni l'autre; on aura alors pour $\rho^2 = c^2$:

$$R'_i R_k - R'_k R_i = 0.$$

Il est possible que cette même équation (4) puisse avoir une autre racine supérieure à c^2, mais elle n'en peut avoir qu'une. Pour qu'elle en ait une, il faut d'abord que l'équation (6) en ait une, c'est à dire que:

$$B_i - B_k > [n(n+1) - m(m+1)]c^2. \tag{7}$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Si cette condition est remplie l'équation (2) pourra avoir une racine. Dans le cas contraire elle n'en aura aucune. D'ailleurs il en est encore de même si, la condition (7) n'étant pas remplie, R_i est divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ sans que R_k le soit.

Dans le cas de $n = m$, qu'il nous reste à examiner, l'équation (6) qui se réduit à

$$B_i - B_k = 0$$

ne peut avoir aucune racine. L'équation (4) ne peut donc en avoir qu'une et l'équation (2) en aura également une au plus.

Si de plus R_i et R_k sont tous deux divisibles par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ou ne le sont ni l'un ni l'autre, le premier membre de (4) s'annule pour $\rho^2 = c^2$ et ne peut avoir d'autre racine. L'équation (2) n'en a donc aucune.

Si R_i est divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ et que R_k ne le soit pas, il peut y avoir o ou une racine. Il n'y en a pas si $\frac{R_i}{R_k}$ est plus petit que 1 pour ρ positif et très grand. Il y en a une dans le cas contraire; car alors pour les valeurs très grandes de ρ, F est négatif, et pour $\rho^2 = c^2$, on voit aisément que F est positif.

En résumé on a

si	$n > m$	R_i div.	R_k non div.	o ou 2 racines
si	$n > m$	R_i non div.	R_k div.	1 racine
si	$n > m$	R_i et	R_k div.	o ou 1 racine
si	$n > m$	R_i et	R_k non div.	o ou 1 racine
si	$n = m$	R_i div.	R_k non div.	o ou 1 racine
si	$n = m$	R_i non div.	R_k div.	o ou 1 racine
si	$n = m$	R_i div.	R_k div.	o racine
si	$n = m$	R_i non div.	R_k non div.	o racine.

§ 11. *Ellipsoïdes de révolution.*

Parmi les ellipsoïdes aplatis de révolution qui sont des figures d'équilibre de notre masse fluide, y en a-t-il qui sont des figures de bifurcation?

Pour étudier ces ellipsoïdes nous prendrons pour variable indépendante $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ que nous appellerons k à l'exemple de LIOUVILLE et non plus ρ_2, afin d'éviter l'indice 2. Nous prendrons c pour unité de longueur, de telle sorte que $c^2 = 1$. On aura alors:

$$R_{i,n} = A(k^2+1)^{\frac{j}{2}} D^{j+n}(k^2+1)^n$$

où

$$i + j = n \quad \text{ou} \quad n + 1$$

A étant une constante et D un indice de dérivation par rapport à k.

A une même fonction:

$$(1) \qquad A(k^2+1)^{\frac{j}{2}} D^{j+n}(k^2+1)^n$$

correspondent en général deux fonctions de LAMÉ distinctes, à savoir:

$$R^1_{n-j,n} \quad \text{et} \quad R^2_{n+1-j,n} \qquad \text{si } j+n \text{ est pair}$$

et

$$R^3_{n-j,n} \quad \text{et} \quad R^4_{n+1-j,n} \qquad \text{si } j+n \text{ est impair.}$$

A chaque fonction (1) correspondront donc deux coëfficients de stabilité que j'appellerai pour abréger:

$$B_{j,n} \quad \text{et} \quad C_{j,n}.$$

Il y a exception quand $j = 0$. Dans ce cas en effet, à une fonction (1) ne correspond qu'une seule fonction de LAMÉ, $R^1_{n,n}$ si n est pair et $R^3_{n,n}$ si n est impair, et par conséquent ne correspond qu'un seul coëfficient de stabilité.

Quand on fait croître ω depuis 0 jusqu'à une certaine valeur ω_0, on trouve comme figures d'équilibre deux ellipsoïdes de révolution qui se confondent pour $\omega = \omega_0$ et disparaissent pour $\omega > \omega_0$. A chaque valeur

de $\omega < \omega_0$ correspondent donc deux valeurs de k et il est aisé de voir que pour $\omega = 0$, ces deux valeurs sont $k = 0$ et $k = \infty$. Pour $\omega = \omega_0$, ces deux valeurs se confondent en une seule k_0. Il y a donc deux séries linéaires Σ et Σ' de formes d'équilibre réelles, la série Σ comprenant les ellipsoïdes tels que $k < k_0$, et la série Σ_1, les ellipsoïdes tels que $k > k_0$.

L'ellipsoïde $k = k_0$ est une forme limite.

Si l'on fait varier k depuis 0 jusqu'à $+\infty$, on voit l'ellipsoïde, d'abord infiniment aplati, se rapprocher ensuite indéfiniment de la sphère. En même temps ω croît d'abord de 0 à ω_0 et décroît ensuite de ω_0 à 0.

Si en suivant la série Σ ou la série Σ_1, on voit un des coëfficients de stabilité changer de signe, l'ellipsoïde correspondant sera une forme de bifurcation. Les deux coëfficients de stabilité $B_{j,n}$ et $C_{j,n}$ que je viens de définir sont toujours égaux entre eux. Quelle est la condition pour que ces coëfficients s'annulent? L'équation

$$B_{j,n} = 0$$

n'est autre chose que l'équation (1) du paragraphe précédent. D'après la discussion de ce paragraphe, on voit que le coëfficient $B_{j,n}$ s'annulera pour une certaine valeur de k, si $j + n$ est pair et si n est plus grand que 1, et ne s'annulera jamais si cette condition n'est pas remplie. Cette même discussion montre que ce coëfficient change de signe en s'annulant. Donc l'ellipsoïde correspondant est de bifurcation.

Ainsi à tout système de nombres j et n tels que:

$$j \equiv n \pmod 2), \qquad n > 1 \tag{2}$$

correspond une valeur de k qui annule deux coëfficients de stabilité et par conséquent un ellipsoïde de bifurcation.

Il y a exception pour le système:

$$j = 0, \qquad n = 2.$$

L'ellipsoïde correspondant est l'ellipsoïde $\omega = \omega_0$, $k = k_0$ dont nous avons parlé plus haut. C'est une forme limite et non une forme de bifurcation.

Un autre système intéressant est le suivant:

$$j = 2, \qquad n = 2.$$

L'ellipsoïde correspondant est celui qui appartient à la fois à la série des ellipsoïdes de révolution et à celle des ellipsoïdes de JACOBI.

Soient deux nombres j et n quelconques, satisfaisant aux conditions (2); soit $K_{j,n}$ la valeur de k qui annule le coëfficient $B_{j,n}$ et $\Omega_{j,n}$ la valeur de ω correspondante.

Faisons maintenant

$$\omega = \Omega_{j,n} + \varepsilon$$

ε étant une quantité infiniment petite; à cette valeur de ω correspondront deux formes d'équilibre, un ellipsoïde de révolution E et une figure Φ très peu différente. Etudions de plus près cette figure Φ. Nous définirons cette figure de la façon suivante: Menons à l'ellipsoïde E une normale quelconque. Nous définirons le point de l'ellipsoïde qui est le pied de cette normale par deux coordonnées φ et μ; φ sera l'angle formé par le plan qui passe par le point considéré et l'axe des z avec le plan des xz, et μ sera la deuxième coordonnée elliptique comprise entre $b^2 = 0$ et $c^2 = 1$. Je prendrai sur cette normale une longueur ζ. La position d'un point dans l'espace sera ainsi définie par les trois coordonnées ζ, μ et φ, et c'est dans ce système de coordonnées que je vais écrire l'équation de la figure Φ. Au système de nombres j et n correspondent deux fonctions de LAMÉ ainsi qu'on l'a vu:

$$R^{1 \text{ ou } 3}_{n-j,n} \qquad \text{et} \qquad R^{2 \text{ ou } 4}_{n+1-j,n}$$

auxquelles il faut adjoindre leurs conjuguées:

$$\begin{aligned} &M^{1 \text{ ou } 3}_{n-j,n} \qquad \text{et} \qquad M^{2 \text{ ou } 4}_{n+1-j,n} \\ (3) \qquad &N^{1 \text{ ou } 3}_{n-j,n} \qquad \text{et} \qquad N^{2 \text{ ou } 4}_{n+1-j,n}. \end{aligned}$$

Les deux fonctions M sont égales entre elles et s'obtiennent en remplaçant dans la fonction R correspondante, k par $\sqrt{1-\mu^2}$ et les deux fonctions N sont égales, l'une à $\cos j\varphi$, l'autre à $\sin j\varphi$.

L'équation de la figure Φ pourra alors s'écrire:

$$\zeta = l(A_1 M_1 N_1 + A_2 M_2 N_2)$$

en négligeant les infiniment petits du 2[d] ordre (ε étant du 1[er] ordre). Dans cette équation l a le même sens que dans le § 8; M_1, N_1, M_2 et N_2

sont les fonctions (3); A_1 et A_2 sont deux constantes infiniment petites du 1[er] ordre et dont le rapport est arbitraire.

Posons:

$$A_1 = \theta \cos \lambda, \qquad A_2 = \theta \sin \lambda$$

θ étant une constante infiniment petite dépendante de ε, et λ étant une constante arbitraire; il viendra, en remplaçant M_1, N_1, M_2 et N_2 par leurs valeurs:

$$\zeta = \theta l \cos(j\varphi - \lambda) M \tag{4}$$

la fonction M s'obtenant comme je l'ai dit plus haut.

Si l'équation (4) était l'équation exacte de la figure Φ, cette équation prouverait que la figure Φ jouirait des symétries suivantes:

1°. Si $j = 0$, la figure Φ serait de révolution autour de l'axe des z.

2°. Si j n'est pas nul, la figure Φ ne changerait pas quand on la ferait tourner autour de l'axe des z d'un angle $\frac{2\pi}{j}$; elle admettrait j plans de symétrie passant par l'axe des z, de façon que l'angle dièdre de deux de ces plans de symétrie consécutifs soit $\frac{\pi}{j}$.

3°. Comme $j + n$ est toujours pair, le plan des xy serait aussi un plan de symétrie.

4°. Enfin si j est pair, l'axe des z serait un axe de symétrie, et l'origine un centre de symétrie.

Mais l'équation (4) n'est qu'une équation approximative de la figure Φ. Pour l'établir nous avons négligé les infiniment petits du 2[d] ordre; de sorte qu'on peut se demander si ces diverses symétries subsisteront encore quand on étudiera l'équation exacte de la figure Φ et qu'on tiendra compte des termes d'ordre supérieur. La réponse à cette question doit être affirmative.

Pour s'en assurer, voici quel artifice on doit employer. Supposons qu'on introduise dans le système des liaisons auxiliaires et qu'on assujettisse la masse fluide à présenter les symétries que nous venons d'énumérer. Je dis que, même avec ces liaisons supplémentaires, l'ellipsoïde qui correspond à la valeur $K_{j,n}$ de k et à la valeur $\Omega_{j,n}$ de ω sera encore une forme de bifurcation.

En effet nous avons vu au § 9 qu'une surface très peu différente de cet ellipsoïde peut être définie par la distance ζ d'un point de cette surface à l'ellipsoïde (comptée sur la normale à l'ellipsoïde) et que cette distance ζ elle-même est donnée en fonction des coordonnées elliptiques sous la forme d'une série convergente

$$\zeta = l \sum A_p M_p N_p$$

M_p et N_p étant des fonctions de Lamé, de telle sorte que la surface en question sera déterminée par la connaissance des coëfficients A_p. Nous avons vu ensuite dans le même paragraphe que l'énergie potentielle totale W pouvait s'écrire, en négligeant les cubes des coëfficients A_p:

$$W = W_0 + \sum A_p^2 B_p \tag{5}$$

les B_p étant les coëfficients de stabilité; de plus, avons-nous dit, pour que l'ellipsoïde soit une figure de bifurcation, il faut et il suffit que l'un des B_p s'annule.

Qu'arrive-t-il maintenant quand on introduit des liaisons dans le système?

Supposons d'abord qu'on assujettisse la masse fluide à être de révolution autour de l'axe des z et symétrique par rapport au plan des xy. Comment ces conditions s'exprimeront-elles analytiquement? Elles signifieront que tous les coëfficients A_p sont assujettis à être nuls, sauf ceux qui correspondent à une fonction M_p dont les nombres caractéristiques j_1 et n_1 satisfassent à la condition:

$$j_1 = 0, \qquad n_1 \equiv 0 \pmod 2.$$

Que faut-il maintenant pour que l'ellipsoïde soit de bifurcation quand on envisage l'équilibre d'une masse fluide assujettie à ces liaisons? Il suffit que dans l'expression (5), le coëfficient B_p de l'un des termes A_p^2 qui ne sont pas assujettis à être nuls, change de signe.

Nous avons supposé que pour l'ellipsoïde $k = K_{j,n}$, le coëfficient de stabilité défini par les deux nombres j et n s'annulait; si nous avons:

$$j = 0, \qquad n \equiv 0 \pmod 2)$$

ce coëfficient de stabilité est un de ceux qui multiplient un terme A_p^2 non assujetti par les liaisons à être nul.

Si donc on envisage l'équilibre du système soumis aux liaisons que nous venons d'énumérer, l'ellipsoïde $k = K_{0,n}$ sera encore une figure de bifurcation. Pour la valeur de

$$\omega = \Omega_{0,n} + \varepsilon$$

on aura donc deux formes d'équilibre du système à liaisons, à savoir un ellipsoïde et une figure Φ' très peu différente.

La figure Φ', à cause des liaisons mêmes auxquelles elle est supposée assujettie, sera de révolution et symétrique par rapport au plan des xy. Mais par suite de la nature même de ces liaisons, la figure Φ' qui est en équilibre en tenant compte des liaisons, restera en équilibre quand on les supprimera. Ce ne peut donc être que la figure Φ elle même qui se trouve ainsi être de révolution quand j est nul.

Supposons maintenant que j ne soit pas nul.

Assujettissons le système aux liaisons suivantes; la masse devra admettre pour plans de symétrie le plan des xy et les j plans:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{h\pi}{j}. \qquad (h=0, 1, 2, \ldots, j-1)$$

Ces conditions traduites analytiquement signifient que tous les coëfficients A_p sont assujettis à être nuls, sauf ceux qui correspondent à une fonction M_p dont les nombres caractéristiques j_1 et n_1 satisfont à la condition:

$$j_1 \equiv 0 \pmod{j}, \qquad j_1 + n_1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

De plus nous avons vu que parmi les fonctions N, les unes sont de la forme $\cos j\varphi$ et les autres de la forme $\sin j\varphi$; les coëfficients de ces dernières seront tous assujettis à être nuls.

Pour que l'ellipsoïde soit de bifurcation quand on considère l'équilibre d'une masse soumise à ces liaisons, il faut et il suffit qu'on voie s'annuler l'un des coëfficients de stabilité B_p qui multiplie un terme A_p^2 que les liaisons n'assujettissent pas à être nul.

Pour l'ellipsoïde $k = K_{j,n}$, les deux coëfficients de stabilité définis par les deux nombres j et n s'annulent; or l'un d'entre eux multiplie un terme A_p^2 que les liaisons n'obligent pas à s'annuler.

Donc, même dans le système à liaisons, l'ellipsoïde $K_{j,n}$ sera une forme de bifurcation. Si l'on fait:

$$\omega = \Omega_{j,n} + \varepsilon$$

on aura deux formes d'équilibre du système à liaisons, à savoir un ellipsoïde et une figure Φ' très peu différente.

La figure Φ', en vertu de ses liaisons mêmes, aura $j+1$ plans de symétrie. Mais ces liaisons sont de telle nature que l'équilibre de la figure Φ' subsistera quand on les supprimera. La figure Φ' n'est donc autre chose que la figure Φ elle-même qui doit ainsi avoir $j+1$ plans de symétrie.

Je vais maintenant expliquer pourquoi les liaisons, dont il vient d'être question, sont telles que si une masse fluide est en équilibre en tenant compte de ces liaisons, l'équilibre subsistera encore quand on les supprimera.

Pour simplifier l'exposition, je supposerai un seul plan de symétrie P qui pourra être, soit le plan des xy, soit un plan passant par l'axe des z.

La condition d'équilibre de la masse fluide supposée libre, c'est que le potentiel V, dû à l'action de toutes les forces qui agissent sur une molécule du fluide, soit constant sur toute la surface libre.

Si on assujettit la masse fluide à être symétrique par rapport au plan P, cette condition se trouve un peu modifiée. Soit V le potentiel en un point quelconque de la surface libre, V' le potentiel en un autre point de cette surface, symétrique du premier par rapport au plan P; la nouvelle condition d'équilibre sera:

$$V + V' = \text{const.}$$

Supposons que cette condition soit remplie et que la masse fluide se trouve en équilibre sous l'action des forces extérieures et des liaisons, et soit par conséquent symétrique par rapport au plan P. Si les forces extérieures se réduisent à l'attraction et à la force centrifuge, elles seront elles-mêmes symétriques par rapport au plan P et on aura par conséquent:

$$V = V'$$

d'où l'on déduit

$$V = \text{const.}$$

Cette condition montre que l'équilibre subsistera encore quand on supprimera les liaisons.

C. Q. F. D.

Il résulte de cette discussion que les symétries que nous avions été conduits à attribuer à la surface Φ, en partant de l'équation (4) qui n'était qu'approximative, lui appartiennent rigoureusement, même quand on tient compte des termes d'ordre supérieur qui entrent dans son équation exacte.

Nous allons nous occuper maintenant de démontrer un résultat qui nous sera utile dans la suite.

Si k est positif et très grand, l'ellipsoïde est très voisin de la sphère et tous les coëfficients de stabilité sont négatifs. Si l'on fait décroître k, il arrivera un moment où un ou deux de ces coëfficients s'annuleront. Quel sera le premier de ces coëfficients qui changera ainsi de signe? Je dis que ce sera celui qui correspond aux nombres:

$$j = 2, \qquad n = 2.$$

Appelons en effet R_2 la fonction de Lamé correspondante et S_2 sa conjuguée. Nous aurons:

$$R_2 = k^2 + 1.$$

Soit maintenant R_i une autre fonction de Lamé et S_i sa conjuguée. Nous aurons:

$$R_i = A(k^2 + 1)^{\frac{j}{2}} D^{j+n}(k^2 + 1)^n$$

A étant une constante. Nous supposerons que $j + n$ est pair, sans quoi le coëfficient correspondant à R_i ne s'annulerait jamais.

Il s'agit de démontrer que la racine $K_{2,2}$ de l'équation

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_2 S_2}{5} = 0$$

est plus grande que la racine $K_{j,n}$ de l'équation:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0.$$

Pour cela il suffit de démontrer que l'expression:

$$\frac{R_2 S_2}{5} - \frac{R_i S_i}{2n+1}$$

est toujours positive, ou bien encore que le quotient:

$$\frac{R_i}{R_2}$$

est toujours croissant.

Nous distinguerons trois cas.

1°. Supposons d'abord $j > 1$.

Il vient alors:

$$\frac{R_i}{R_2} = A(k^2+1)^{\frac{j-2}{2}} D^{j+n}(k^2+1)^n.$$

A est une constante positive; $(k^2+1)^{\frac{j-2}{2}}$ se réduit à 1 ou est toujours croissant; enfin le dernier facteur $D^{j+n}(k^2+1)^n$ est un polynôme entier en k dont tous les coëfficients sont positifs et est par conséquent toujours croissant.

C. Q. F. D.

2°. Supposons maintenant $j=0$; $n=2p$.

Il vient alors

$$\frac{R_i}{R_2} = A\frac{D^{2p}(k^2+1)^{2p}}{(k^2+1)}.$$

La dérivée logarithmique du 1^er^ nombre est donc

$$\frac{D^{2p+1}(k^2+1)^{2p}}{D^{2p}(k^2+1)^{2p}} - \frac{2k}{k^2+1}.$$

Je veux démontrer qu'elle est positive, c'est à dire que

$$F = (k^2+1)D^{2p+1} - 2kD^{2p} > 0$$

où D^{2p} et D^{2p+1} désignent les dérivées d'ordre $2p$ et $2p+1$ de $(k^2+1)^{2p}$. On trouve:

$$(k^2+1)^{2p} = \sum \frac{\underline{|2p}}{\underline{|q}\,\underline{|2p-q}} k^{2q} \qquad (q=0,1,2,\ldots,2p)$$

d'où:

$$D^{2p} = \sum \frac{\underline{|2p}\,\underline{|2q}}{\underline{|q}\,\underline{|2p-q}\,\underline{|2q-2p}} k^{2q-2p}. \qquad (q=p,p+1,\ldots,2p)$$

Nous écrirons pour abréger:

$$D^{2p} = \sum A_q k^{2q-2p}$$

et il viendra:

$$F = (k^2+1)\sum A_q(2q-2p)k^{2q-2p-1} - 2k\sum A_q k^{2q-2p}.$$

Le coëfficient de

$$k^{2q-2p+1}$$

dans F sera donc

$$(2q-2p-2)A_q + (2q-2p+2)A_{q+1}.$$

Pour que F soit toujours positif, il suffit que tous ces coëfficients soient positifs. Or comme tous les A_q sont positifs, il ne peut y avoir de doute que si $2q-2p-2$ est négatif, c'est à dire pour:

$$q = p.$$

La coëfficient de F devient alors

$$2A_{p+1} - 2A_p.$$

Si nous écrivons qu'il est positif, il viendra:

$$A_{p+1} > A_p$$

ou bien:

$$\frac{\underline{|2p}\,\underline{|2p+2}}{\underline{|p+1}\,\underline{|p-1}\,\underline{|2}} > \frac{\underline{|2p}\,\underline{|2p}}{\underline{|p}\,\underline{|p}}$$

ou bien encore:

$$\frac{(2p+2)(2p+1)}{2.(p+1)} > \frac{1}{p}$$

ou enfin:

$$p(2p+1) > 1$$

ce qui est évident; donc F est toujours positif.

C. Q. F. D.

3°. On peut supposer enfin:

$$j = 1, \qquad n = 2p + 1.$$

Il viendra

$$\frac{R_i}{R_2} = A \frac{D^{2p+2}(k^2+1)^{2p+1}}{\sqrt{k^2+1}}$$

ou en désignant simplement par D^k la k^e dérivée de $(k^2+1)^{2p+1}$

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{AD^{2p+2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

dont la dérivée logarithmique est:

$$\frac{D^{2p+3}}{D^{2p+2}} - \frac{k}{k^2+1};$$

pour qu'elle soit positive, il faut que

$$F = (k^2+1)D^{2p+3} - kD^{2p+2} > 0.$$

Or on a

$$(k^2+1)^{2p+1} = \sum \frac{\lfloor 2p+1}{\lfloor q \lfloor 2p+1-q} k^{2q}$$

d'où:

$$D^{2p+2} = \sum A_q k^{2q-2p-2} = \sum \frac{\lfloor 2p+1 \lfloor 2q}{\lfloor q \lfloor 2p+1-q \lfloor 2q-2p-2} k^{2q-2p-2}.$$

$$(q = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ 2p+1).$$

Il vient donc

$$F = (k^2+1)\sum A_q(2q-2p-2)k^{2q-2p-3} - k\sum A_q k^{2q-2p-2}.$$

Le coëfficient de

$$k^{2q-2p-1}$$

dans F sera donc:

$$A_q(2q - 2p - 3) + A_{q+1}(2q - 2p).$$

Ce coëfficient ne pourrait être négatif que si l'on avait:

$$2q - 2p - 3 < 0$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour $q = p + 1$.

Le coëfficient de F devient alors

$$2A_{p+2} - 3A_{p+1}.$$

Ecrivons que ce coëfficient est positif, il viendra:

$$3\,\frac{\underline{|2p+1}\;\underline{|2p+2}}{\underline{|p+1}\;\underline{|p}} < 2\,\frac{\underline{|2p+1}\;\underline{|2p+4}}{\underline{|p+2}\;\underline{|p-1}\;\underline{|2}}$$

ou:

$$\frac{3}{p} < \frac{(2p+3)(2p+4)}{p+2}$$

ou:

$$p(2p+3)(2p+4) - 3(p+2) > 0$$

ou:

$$4p^3 + 14p^2 + 9p - 6 > 0$$

inégalité qui est vérifiée même pour $p = 1$.

Donc F est encore positif.

C. Q. F. D.

Nous devons conclure de cette discussion que si l'on fait décroître k depuis $+\infty$ jusqu'à 0, de façon que l'ellipsoïde d'abord très voisin d'une sphère s'aplatisse de plus en plus, on rencontrera une infinité d'ellipsoïdes qui appartiendront à d'autres séries linéaires de figures d'équilibre. Le premier que l'on rencontrera ainsi sera celui qui appartient à la série des ellipsoïdes de Jacobi et qui correspond au cas de $j = n = 2$.

§ 12. *Ellipsoïdes de Jacobi.*

Nous allons rechercher maintenant si parmi les ellipsoïdes de Jacobi il y a des formes d'équilibre de bifurcation.

Nous poserons comme dans le paragraphe précédent:

$$\rho^2 = k^2 + c^2, \qquad c^2 = 1$$

et nous ferons varier b^2 depuis 0 jusqu'à $c^2 = 1$.

A chaque valeur de b^2 correspondra une valeur de k, que j'appellerai H et qui sera telle que l'ellipsoïde dont les axes sont k, $\sqrt{k^2 + c^2 - b^2}$ et $\sqrt{k^2 + 1}$ soit un ellipsoïde de Jacobi.

Voyons quelle relation lie b^2 à H.

Parmi les fonctions de Lamé du 2[d] ordre, je citerai la suivante:

$$\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}.$$

Nous l'appellerons R_2; en effet si on fait $b^2 = 0$, elle se réduit à $k^2 + 1$; c'est donc bien une des deux fonctions que nous avons appelées R_2 dans le paragraphe précédent et qui se réduisaient toutes deux à $k^2 + 1$ pour $b^2 = 0$; nous réserverons la notation R_2 à la seule fonction $\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}$, à laquelle correspondront une fonction S_2 et deux fonctions:

$$M_2 = \mu\sqrt{\mu^2 - b^2}, \qquad N_2 = \nu\sqrt{b^2 - \nu^2}.$$

Si l'on fait tourner l'ellipsoïde E d'un angle infiniment petit autour de l'axe des z, de façon à lui faire occuper la position E'; puis que l'on appelle ζ la distance des deux ellipsoïdes E et E' comptée normalement à l'un d'eux, on trouvera aisément:

$$\zeta = A_2 l M_2 N_2$$

A_2 étant une constante infiniment petite.

Mais si l'ellipsoïde E est un ellipsoïde de Jacobi, son équilibre sera indifférent et ne sera pas altéré quand on fera tourner la figure d'un angle quelconque autour de l'axe des z. L'équilibre subsistera quand

on fera varier A_2 d'une manière quelconque. Donc le coëfficient de stabilité correspondant devra être nul, c'est à dire que l'on devra avoir:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_2 S_2}{5} = 0. \tag{1}$$

Telle est l'équation qui lie H à b^2 et qui exprime que l'ellipsoïde E est un ellipsoïde de JACOBI.

Cela montre qu'à chaque valeur de b^2 correspond une valeur de H et une seule. Lorsque b^2 tend vers c^2, cette valeur de H tend vers 0. On sait en effet que quand ω tend vers 0, le rapport du petit axe au moyen, dans l'ellipsoïde de JACOBI, tend vers l'unité et que le rapport du petit axe au grand tend vers 0.

Pour qu'un ellipsoïde de JACOBI soit de bifurcation, il faut qu'un autre de ses coëfficients de stabilité s'annule, ce qui exige que l'on ait:

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R_i S_i}{2n+1} \tag{2}$$

n étant l'ordre de la fonction R_i.

L'équation:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0 \tag{3}$$

aura une racine que j'appellerai K_i, pourvu que R_i ne soit pas divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$.

Les équations (2) se réduiront donc à

$$H = K_i.$$

Pour $b^2 = 0$, on revient au cas du paragraphe précédent, et on a vu à la fin de ce paragraphe que:

$$H > K_i$$

car la plus grande des valeurs de k pour lesquelles un coëfficient de stabilité s'annulait, était précisément $K_{2,2}$ c'est à dire H.

Voyons maintenant ce qui se passe pour $b^2 = c^2 = 1$.

La fonction R_i se réduit à

$$A(\rho^2 - 1)^{\frac{h}{2}} D^{h+n}(\rho^2 - 1)^n$$

h étant un entier plus petit que n. En particulier R_1 se réduit à

$$(\rho^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Il résulte de là que si h n'est pas nul, l'équation (3) est satisfaite pour $\rho^2 = 1$. Par conséquent pour $b^2 = c^2$, K_i devient nul et égal à H.

Au contraire si $h = 0$, R_i se réduit à

$$AD^n(\rho^2 - 1)^n$$

et K_i est positif et par conséquent plus grand que H.

Si donc h est nul, l'équation $H = K_i$ est satisfaite au moins une fois, et certainement un nombre impair de fois.

Nous pouvons discuter également l'équation:

$$\frac{R_2 S_2}{5} - \frac{R_i S_i}{2n + 1} = 0. \tag{4}$$

Nous devons rechercher d'abord dans quels cas le rapport $\frac{R_i}{R_2}$ est toujours croissant.

Si nous laissons de côté comme il convient les fonctions R_i divisibles par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, la fonction R_i peut affecter 4 formes différentes, à savoir:

$$R_i = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_p)$$

$$R_i = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_{p-1})$$

si $n = 2p$ et

$$R_i = \rho(\rho^2 - \alpha_1)(\rho - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_p).$$

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - b^2}(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_p)$$

si $n = 2p + 1$. Les α sont des quantités positives comprises entre 0 et c^2 et que je suppose rangées dans l'ordre décroissant.

Tous les α étant plus petits que c^2, tous les facteurs $\rho^2 - \alpha$ seront croissants quand ρ^2 croîtra de c^2 à $+\infty$. De même tous les α étant positifs, le rapport

$$\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho}$$

sera constamment croissant. Enfin le rapport:

$$\frac{\rho^2 - \alpha}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}$$

sera croissant si α est plus grand que b^2.

Dans les quatre cas possibles, nous pourrons écrire:

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{\rho^2 - \alpha_1}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} \frac{\rho^2 - \alpha_2}{\rho} (\rho^2 - \alpha_3) \ldots (\rho^2 - \alpha_p)$$

$$\frac{R_i}{R_2} = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_{p-1})$$

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{\rho^2 - \alpha_1}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} (\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_p)$$

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{\rho^2 - \alpha_1}{\rho} (\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_p).$$

Tous ces facteurs seront croissants si α_1 est plus grand que b^2, ou bien encore si R_i est divisible par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$. Dans ces deux cas le rapport $\frac{R_i}{R_2}$ sera toujours croissant.

Il suit de là que l'équation (4) ne pourra avoir de racine que si R_i n'est pas divisible par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et a tous ses zéros inférieurs à b^2. Les seules fonctions R_i qui satisfassent à ces conditions, sont celles que nous avons représentées par la notation $R^1_{0,n}$ et qui pour $b^2 = c^2 = 1$ se réduisent à

$$AD^n(\rho^2 - 1)^n.$$

Les équations (2) ne peuvent donc être satisfaites si R_i n'est pas égal à $R^1_{0,n}$, et si $R_i = R^1_{0,n}$, nous avons vu qu'elles peuvent toujours l'être.

Il resterait à établir qu'elles ne peuvent l'être que d'une seule manière.

Bien que diverses raisons me fassent penser qu'il en est probablement ainsi, je n'ai pu encore le démontrer rigoureusement. Il y aurait surtout intérêt à établir cette proposition en ce qui concerne la plus simple de toutes les fonctions $R^1_{0,n}$, c'est à dire en ce qui concerne:

$$R^1_{0,3} = \frac{1}{5}\rho[5\rho^2 - 2(b^2 + c^2) + \sqrt{4b^4 - 7b^2c^2 + 4c^4}).$$

Il faudrait pour cela des calculs qui seraient sans doute fort longs, mais qui ne seraient pas inextricables.

Soit C_n le coëfficient de stabilité qui s'annule quand les équations

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R^1_{0,n} S^1_{0,n}}{2n+1}$$

sont satisfaites.

Supposons que b^2 croisse depuis 0 jusqu'à 1; nous verrons tous les coëfficients C_n s'annuler successivement.

On peut se demander quel est celui qui s'annule le premier. Je vais démontrer que c'est C_3.

Il suffira pour montrer qu'il en est ainsi, d'établir que le rapport

$$\frac{R^1_{0,n}}{R^1_{0,p}} \text{ (où } n > p)$$

est toujours croissant quand ρ^2 croît de c^2 à l'infini.

On le vérifie aisément quand $b^2 = 0$ et quand $b^2 = c^2$.

Supposons maintenant que b^2 soit quelconque. Soient B_n et B_p les valeurs de B qui correspondent aux fonctions $R^1_{0,n}$ et $R^1_{0,p}$. Pour que le rapport:

$$\frac{R^1_{0,n}}{R^1_{0,p}}$$

ne fût pas constamment croissant, il faudrait, comme on l'a vu au § 10 que l'équation en ρ^2

$$\psi = [n(n+1) - p(p+1)]\rho^2 - (B_n - B_p) = 0$$

eût une racine supérieure à c^2. Je dis que cela est impossible.

En effet l'expression suivante:

$$R^1_{0,p}\frac{dR^1_{0,n}}{d\varepsilon} - R^1_{0,n}\frac{dR^1_{0,p}}{d\varepsilon}$$

s'annule pour $\rho^2 = b^2$ et pour $\rho^2 = c^2$; car ces valeurs annulent à la fois $\frac{dR^1_{0,n}}{d\varepsilon}$ et $\frac{dR^1_{0,p}}{d\varepsilon}$.

Il faut donc que dans l'intervalle compris entre b^2 et c^2, l'expression

$$R^1_{0,p}\frac{d^2R^1_{0,n}}{d\varepsilon^2} - R^1_{0,n}\frac{d^2R^1_{0,p}}{d\varepsilon^2} = \psi R^1_{0,n}R^1_{0,p}$$

s'annule au moins une fois. Or $R^1_{0,n}$ et $R^1_{0,p}$ ne peuvent s'annuler puisque tous leurs zéros sont inférieurs à b^2. Donc ψ devra s'annuler pour une valeur de ρ^2 comprise entre b^2 et c^2; cette expression, qui est du 1^er^ degré en ρ^2 ne pourra donc pas s'annuler pour une valeur ρ^2 plus grande que c^2.

C. Q. F. D.

Nous devons donc conclure que C_3 est le premier coëfficient qui s'annule.

Les ellipsoïdes de Jacobi pour lesquels un des coëfficients C_n s'annule sont des ellipsoïdes de bifurcation. A chacun de ces coëfficients correspond donc une nouvelle série linéaire de formes d'équilibre. Que savons-nous sur les figures qui font partie de ces différentes séries linéaires?

Soit ω_n la valeur de la vitesse angulaire pour laquelle le coëfficient C_n s'annule; soit ε une quantité infiniment petite. Pour la vitesse angulaire $\omega_n + \varepsilon$, il y aura deux figures d'équilibre possibles, à savoir un ellipsoïde et une surface S qui en diffère infiniment peu et qui a pour équation:

$$\zeta = \theta l M^1_{0,n} N^1_{0,n}. \tag{5}$$

Dans cette équation, ζ, θ et l ont la même signification que dans le paragraphe précédent, et $M^1_{0,n}$, $N^1_{0,n}$ sont les fonctions conjuguées de $R^1_{0,n}$. La fonction $M^1_{0,n}$ ne contient en facteur ni $\sqrt{c^2-\mu^2}$ ni $\sqrt{\mu^2-b^2}$; de même la fonction $N^1_{0,n}$ ne contient en facteur ni $\sqrt{c^2-\nu^2}$ ni $\sqrt{b^2-\nu^2}$. Donc ζ

ne change pas quand un de ces quatre radicaux change de signe, c'est à dire quand y se change en $-y$, ou bien z en $-z$.

Cela veut dire que les plans des xz et des xy sont des plans de symétrie de la surface S.

Si maintenant n est pair, $M_{0,n}^1$, $N_{0,n}^1$ et par conséquent ζ ne changent pas quand on change μ en $-\mu$ ou ν en $-\nu$; cela revient à dire que ζ ne change pas quand on change x en $-x$ ou que la surface S est symétrique par rapport au plan des yz.

Cette symétrie n'a pas lieu si n est impair; ζ se change alors en $-\zeta$ quand x se change en $-x$.

Ainsi la surface S admet, si n est pair, les mêmes plans de symétrie que l'ellipsoïde dont elle dérive, et si n est impair, elle n'est symétrique que par rapport aux plans qui sont perpendiculaires au petit axe et à l'axe moyen. Dans tous les cas, elle est symétrique par rapport au grand axe.

Ce grand axe n'est pas l'axe de rotation et si n est impair, la surface S n'est pas symétrique par rapport à l'axe de rotation. Il est vrai que l'équation (5) sur laquelle nous venons de nous appuyer pour établir ces résultats n'est qu'approximative et qu'on y a négligé les quantités de l'ordre de θ^2. Mais on montrerait par un raisonnement, de tout point semblable à celui du paragraphe précédent, que les symétries auxquelles nous conduit l'équation approximative (5) subsisteraient encore si on la remplaçait par l'équation exacte de la surface S.

Cette surface a donc *rigoureusement* deux plans de symétrie si n est impair, et trois si n est pair.

Parmi les surfaces S, nous distinguerons la surface Σ_3 qui correspond au coëfficient de stabilité C_3. Quelle est son intersection avec l'ellipsoïde dont elle dérive? Pour avoir cette courbe, il suffit d'écrire que ζ est nul, ou que

$$M_{0,3}^1 = 0, \qquad N_{0,3}^1 = 0$$

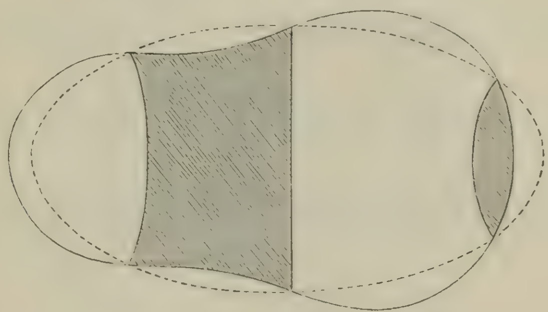
ce qui donne:

$$\mu = 0, \qquad \nu = 0, \qquad \nu = \pm\sqrt{\frac{2(b^2+c^2) - \sqrt{4b^4 - 7b^2c^2 + 4c^4}}{5}}.$$

Cette intersection se compose donc de l'ellipse principale, section de l'ellipsoïde par le plan des yz et de deux lignes de courbure de cet ellipsoïde.

Cela n'est vrai, bien entendu, qu'approximativement et en négligeant le carré de θ.

La figure représente en projection sur l'un des deux plans de symétrie la surface Σ_3 et l'ellipsoïde dont elle dérive.



Le contour apparent de l'ellipsoïde est représenté en trait pointillé, le contour apparent de Σ_3 et l'intersection des deux surfaces en trait plein. On a couvert de hachures la portion de la surface Σ_3 qui est vue à travers l'ellipsoïde.

On voit d'après cette figure comment on passe de l'ellipsoïde de Jacobi à la surface Σ_3. La plus grande portion de la matière semble se rapprocher de la forme sphérique, tandis que la plus petite portion de cette même matière sort de l'ellipsoïde par l'extremité du grand axe, comme si elle voulait se séparer de la masse principale. Qu'on me pardonne d'employer un langage aussi dépourvu de précision mathématique.

§ 13. *Petits mouvements d'un ellipsoïde.*

Imaginons d'abord une masse fluide homogène rapportée à des axes fixes; et supposons que ses molécules s'attirent suivant la loi de Newton et que chacune d'elles soit soumise en outre à une force dont les composantes suivant les trois axes soient αx, βy et γz. Les coëfficients α, β et γ devront être choisis de telle sorte que la masse soit en équilibre absolu sous la forme de l'ellipsoïde:

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Supposons maintenant que la masse soit dérangée de cette position d'équilibre, de telle façon que les coordonnées de la molécule (x, y, z) deviennent $x + \partial x$, $y + \partial y$, $z + \partial z$. Nous imaginerons que ∂x, ∂y, ∂z sont tels que:

$$\partial x dx + \partial y dy + \partial z dz = d\varphi$$

soit une différentielle exacte et que:

$$\partial x = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad \partial y = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad \partial z = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Pour l'équation de continuité, nous devons avoir:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

de sorte que nous pourrons écrire:

$$\varphi = \Sigma \xi RMN$$

les ξ étant divers coëfficients constants et R, M, N étant les fonctions de Lamé.

Les composantes de la vitesse de la molécule (x, y, z) sont:

$$u = \frac{d^2\varphi}{dx\,dt}, \qquad v = \frac{d^2\varphi}{dy\,dt}, \qquad w = \frac{d^2\varphi}{dz\,dt}.$$

La demi-force vive T aura alors pour expression:

$$\frac{1}{2}\int (u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments du volume de l'ellipsoïde. Mais en vertu du théorème de Green, cette intégrale peut être remplacée par la suivante:

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{dt}(u\,dy\,dz + v\,dx\,dz + w\,dx\,dy)$$

en tenant compte de l'équation de continuité, ou bien encore:

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{dt}\,\frac{d^2\varphi}{dt\,dn}\,d\omega.$$

Dans cette expression $d\omega$ désigne un élément quelconque de la superficie de l'ellipsoïde et $\frac{d^2\varphi}{dt\,dn}dn$ est l'accroissement de la fonction $\frac{d\varphi}{dt}$ quand le point correspondant subit un déplacement dn dans une direction normale à l'ellipsoïde.

Cherchons à évaleur $\frac{d^2\varphi}{dt\,dn}$. Nous trouverons:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum \frac{d\xi}{dt} RMN$$

et

$$\frac{d^2\varphi}{dt\,dn} = \sum \frac{d\xi}{dt} MN \frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{dn}.$$

Or on a:

$$\frac{d\rho}{dn} = l\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

l ayant la même signification que dans les paragraphes précédents.

On en conclut:

$$T = \frac{1}{2}\sum \int \left(\frac{d\xi}{dt} RMN\right)\left(\frac{d\xi_1}{dt}\frac{dR_1}{d\rho} M_1 N_1\right) l\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\,d\omega$$

la fonction de Lamé M_1 pouvant être identique ou non identique à la fonction M et la sommation indiquée par le signe $\sum$ s'étendant à tous les systèmes de fonctions de Lamé M et M_1,

Mais si l'on tient compte de l'équation:

$$\int lMNM_1N_1 d\omega = 0, \qquad (M \gtrless M_1)$$

il viendra simplement:

$$T = \frac{1}{2}\sum \left[\frac{d\xi^2}{dt^2} R\frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \int lM^2N^2 d\omega\right].$$

Soit maintenant U l'énergie potentielle de la masse fluide dans une position quelconque et U_0 la valeur de cette énergie dans la position d'équilibre. Nous avons vu au § 9 que l'on a:

$$U = U_0 - 2\pi \sum A^2 \left(gl - \frac{RS}{2n+1}\right) \int lM^2N^2 d\omega.$$

Ici n désigne l'ordre de la fonction R, g est la force normale qui agit en un point quelconque de la surface de l'ellipsoïde. Enfin on suppose que le déplacement d'une molécule quelconque de cette surface, estimé normalement à l'ellipsoïde a pour expression

$$\Sigma AlMN.$$

Dans le cas qui nous occupe, ce déplacement est égal à $\frac{d\varphi}{dn}$ ou à:

$$\sum \xi MN \frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{dn} = \sum \xi lMN \frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

d'où

$$A = \xi \frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

et:

$$U = U_0 - \sum 2\pi\xi^2 \frac{dR^2}{d\rho^2}(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)\left(gl - \frac{RS}{2n+1}\right)\int lM^2N^2 d\omega.$$

Les équations du mouvement seront:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dT}{d\left(\frac{d\xi}{dt}\right)}\right] = \frac{dU}{d\xi}$$

ce qui donne

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}R = -4\pi\xi\frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\left(gl - \frac{RS}{2n+1}\right). \tag{1}$$

Cette équation montre, ce que nous savions déjà, que l'équilibre est stable pourvu que tous les coëfficients:

$$gl - \frac{RS}{2n+1}$$

soient positifs, et elle nous apprend en même temps à calculer les périodes des oscillations infiniment petites de notre masse fluide.

Avant d'aller plus loin, nous allons calculer en restant dans l'hypothèse précédente, le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe des z. Nous représenterons ce moment par la lettre M.

Nous aurons:

$$M = M_1 + M_2 = \int \left[(y + \partial y) \frac{d\partial x}{dt} - (x + \partial x) \frac{d\partial y}{dt} \right] dx\,dy\,dz$$

où

$$M_1 = \int \left(y \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - x \frac{d^2\varphi}{dy\,dt} \right) dx\,dy\,dz$$

$$M_2 = \int \left(\frac{d\varphi}{dy} \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dy\,dt} \right) dx\,dy\,dz.$$

Le premier terme M_1 peut se calculer immédiatement. Le théorème de Green donne en effet:

$$M_1 = \int \frac{d\varphi}{dt} d\omega (y \cos\alpha - x \cos\beta)$$

$d\omega$ désignant toujours un élément de la surface de l'ellipsoïde, et $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ étant les cosinus directeurs de la normale.

On trouve alors:

$$y \cos\alpha - x \cos\beta = klM_2N_2$$

où M_2 et N_2 désignent comme dans le paragraphe précédent deux fonctions de Lamé conjuguées:

$$\mu\sqrt{\mu^2 - b^2} \quad \text{et} \quad \nu\sqrt{b^2 - \nu^2}$$

et k un coëfficient dépendant seulement de ρ et égal à:

$$- c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Si l'on appelle ξ_2 le coëfficient de $R_2M_2N_2$ dans l'expression de φ, il reste simplement:

$$M_1 = - k \frac{d\xi_2}{dt} R_2 \int lM_2^2 N_2^2 d\omega.$$

Calculons maintenant M_2; le théorème de Green nous donnera encore:

$$M_2 = \int \frac{d\varphi}{dt} d\omega \left(\frac{d\varphi}{dy} \cos\alpha - \frac{d\varphi}{dx} \cos\beta \right).$$

Nous allons nous occuper de calculer le facteur:

$$F = \frac{d\varphi}{dy}\cos\alpha - \frac{d\varphi}{dx}\cos\beta.$$

Nous remarquerons pour cela que si l'on pose avec LIOUVILLE:

$$P = l\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^3 - c^2}$$

on a:

$$\cos\alpha = \frac{Px}{\rho^2}, \qquad \cos\beta = \frac{Py}{\rho^2 - b^2}, \qquad \cos\gamma = \frac{Pz}{\rho^2 - c^2}$$

ce qui donne:

$$F = l\sqrt{\rho^2 - c^2}\left(\frac{x\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\rho}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{y\rho}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}\frac{d\varphi}{dx}\right).$$

Nous pouvons encore exprimer F d'une autre manière. Donnons à x, y et z des accroissements

$$\partial x = -\partial s\frac{y}{\rho^2 - b^2}, \qquad \partial y = \partial s\frac{x}{\rho^2}, \qquad \partial z = 0$$

il en résultera pour la fonction φ un accroissement $\partial\varphi$ et l'on aura:

$$F = l\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

Il importe de remarquer que si le point (x, y, z) est sur l'ellipsoïde, il en est de même du point infiniment voisin $(x + \partial x,\ y + \partial y,\ z + \partial z)$.

Nous allons maintenant utiliser une remarque de LIOUVILLE, grâce à laquelle les fonctions de LAMÉ peuvent être ramenées aux fonctions sphériques.

Soit $\varphi = RMN$ le produit de trois fonctions de LAMÉ conjuguées d'ordre n. Changeons de variables en posant:

$$X = \frac{x}{\rho}, \qquad Y = \frac{y}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}, \qquad Z = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Si le point (x, y, z) se trouve sur l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

le point correspondant (X, Y, Z) se trouvera sur la sphère:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

et pour tous les points de cette sphère, la fonction φ sera égale à une constante multipliée par une fonction sphérique de degré n. Nous pourrons écrire

$$\varphi = \varepsilon . \psi$$

ψ étant un polynôme homogène de degré n en X, Y et Z et satisfaisant à l'équation:

$$\frac{d^2\psi}{dX^2} + \frac{d^2\psi}{dY^2} + \frac{d^2\psi}{dZ^2} = 0$$

et ε étant une fonction de X, Y et Z qui est constante en tous les points de la sphère de rayon 1.

Nous aurons d'autre part:

$$\partial X = \frac{\partial x}{\rho} = - \partial s \frac{y}{\rho(\rho^2 - b^2)} = - \partial s \frac{Y}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}}$$

et de même:

$$\partial Y = \partial s \frac{X}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}}, \qquad \partial Z = 0.$$

On aura dans les mêmes conditions:

$$\partial \varepsilon = 0, \qquad \partial\varphi = \varepsilon\partial\psi = \varepsilon\left(\frac{d\psi}{dX}\partial X + \frac{d\psi}{dY}\partial Y\right) .$$

d'où:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\varepsilon}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}}\left(X\frac{d\psi}{dY} - Y\frac{d\psi}{dX}\right)$$

et enfin:

$$F = l\varepsilon\sqrt{\rho^2 - c^2}\left(X\frac{d\psi}{dY} - Y\frac{d\psi}{dX}\right).$$

Il est aisé de vérifier que si ψ est un polynôme homogène de degré n, en x, y et z satisfaisant à l'équation:

$$\frac{d^2\psi}{dX^2} + \frac{d^2\psi}{dY^2} + \frac{d^2\psi}{dZ^2} = 0$$

il en sera de même de:

$$X\frac{d\psi}{dY} - Y\frac{d\psi}{dX}.$$

Il en résulte que si φ est égal à une constante multipliée par le produit de trois fonctions de LAMÉ conjuguées et d'ordre n, F sera de la forme suivante:

$$F = l(\alpha_1 M_1' N_1' + \alpha_2 M_2' N_2' + \ldots + \alpha_p M_p' N_p').$$

Dans cette expression, α_1, α_2, ..., α_p sont des quantités qui restent constantes *sur toute la surface de notre ellipsoïde* et M_1', N_1'; M_2', N_2'; ...; M_p', N_p' sont des systèmes de fonctions de LAMÉ conjuguées et *qui sont toutes d'ordre* n.

Nous dirons pour abréger qu'une somme de la forme:

$$\alpha_1 M_1' N_1' + \alpha_2 M_2' N_2' + \ldots + \alpha_p M_p' N_p'$$

est une somme de LAMÉ d'ordre n.

Si alors nous avons, comme nous l'avons supposé plus haut:

$$\varphi = \sum \xi_i R_i M_i N_i$$

il viendra:

$$F = l\sum \xi_i H_i$$

H_i étant une somme de LAMÉ de même ordre que les fonctions R, M, N. Ainsi les coëfficients d'une même indéterminée ξ seront de même ordre dans l'expression de φ et dans celle de F.

Il vient alors:

$$M_2 = \int F\frac{d\varphi}{dt}d\omega = \sum R_k \xi_i \frac{d\xi_k}{dt}\int l H_i M_k N_k d\omega.$$

Remarquons que l'intégrale:

$$\int l H_i M_k N_k d\omega$$

est nulle si les sommes H_i et $M_k N_k$ ne sont pas de même ordre.

Nous dirons pour abréger que l'indéterminée ξ_i est de rang n si les fonctions R_i, M_i et N_i sont d'ordre n.

Il résulte de ce qui précède que l'on a:

$$M_2 = \sum A_{ik}\xi_i \frac{d\xi_k}{dt}$$

les A_{ik} étant des coëfficients constants qui sont nuls si les indéterminées ξ_i et ξ_k ne sont pas de même rang.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que des petits mouvements absolus d'un ellipsoïde rapporté à deux axes fixes. Passons maintenant au cas des petits mouvements relatifs d'un ellipsoïde fluide rapporté à un système d'axes mobiles tournant avec une vitesse uniforme ω autour de l'axe des z.

Envisageons les équations générales de l'hydrodynamique:

$$\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} = X - \frac{dp}{dx}$$

où u, v, w désignent les composantes de la vitesse; X, Y, Z les composantes de la force; p la pression, et où la densité de fluide est prise pour unité. Nous aurons d'ailleurs:

$$X = \frac{dV}{dx} - 2\omega v, \qquad Y = \frac{dV}{dy} + 2\omega u, \qquad Z = \frac{dV}{dz}$$

où V représente le potentiel des forces et où $-\omega v$ et ωu sont les composantes de la force centrifuge composée. Si nous posons:

$$V - p = \psi$$

et si nous négligeons le carré de u, v, w en observant que les mouvements doivent être très petits, il viendra:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2\omega v &= \frac{d\psi}{dx} \\ \frac{dv}{dt} - 2\omega u &= \frac{d\psi}{dy} \\ \frac{dw}{dt} \qquad &= \frac{d\psi}{dz} \end{aligned}$$

avec l'équation de continuité:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

On en tire aisément:

$$\frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} = 4\omega^2 \frac{d^2\psi}{dz^2}. \tag{3}$$

Cette équation ne suffit pas pour déterminer la fonction ψ. Il faut pour achever de connaître cette fonction, tenir compte de cette circonstance que la pression doit être nulle sur toute la surface libre. On doit donc avoir sur cette surface:

$$\psi = V.$$

Pour pousser plus loin cette analyse, envisageons séparément un des mouvements élémentaires dans lesquels on peut décomposer tous les petits mouvements de l'ellipsoïde. Soient ∂x, ∂y, ∂z les déplacements infiniment petits d'une molécule et écrivons:

$$\partial x = e^{i\lambda t}\xi, \qquad \partial y = e^{i\lambda t}\eta, \qquad \partial z = e^{i\lambda t}\zeta$$

ξ, η et ζ ne dépendant que de x, y et z. Les équations (2) et (3) deviendront alors:

$$\begin{aligned} -\xi\lambda^2 + 2\omega i\lambda\eta &= \frac{d\psi_1}{dx} \\ -\eta\lambda^2 + 2\omega i\lambda\xi &= \frac{d\psi_1}{dy} \\ -\zeta\lambda^2 \qquad\qquad &= \frac{d\psi_1}{dz} \end{aligned} \qquad (\psi = e^{i\lambda t}\psi_1) \tag{4}$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\psi_1}{dy^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{d^2\psi_1}{dz^2} = 0$$

où ψ_1 ne dépend que de x, y et z.

Voyons maintenant ce que devient la condition relative à la surface libre.

Soient $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les trois cosinus directeurs de la normale en un point de l'ellipsoïde et supposons que l'on ait en tous les points de cette surface

$$\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma = \sum A_k l M_k N_k$$

le second membre étant une série développée suivant les produits $M_k N_k$ de deux fonctions de Lamé conjuguées. Une formule du § 9 nous donnera, en tous les points de la surface libre

$$V = -4\pi e^{i\lambda t} \sum A_k \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1} \right) M_k N_k .$$

L'équation $\psi = V$ se réduit donc à:

$$\psi_1 = -4\pi \sum A_k \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1} \right) M_k N_k . \tag{5}$$

D'autre part les équations (4) nous donnent:

$$\xi = -\frac{\frac{d\psi_1}{dx}\lambda + 2\frac{d\psi_1}{dy}\omega i}{\lambda(\lambda^2 - 4\omega^2)}, \qquad \eta = -\frac{\frac{d\psi_1}{dy}\lambda - 2\frac{d\psi_1}{dx}\omega i}{\lambda(\lambda^2 - 4\omega^2)}, \qquad \zeta = -\frac{\frac{d\psi_1}{dz}}{\lambda^2}$$

d'où

$$\frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{l}(\xi \cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)$$

$$= \lambda\left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{\cos\alpha}{l} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{\cos\beta}{l} + \frac{d\psi_1}{dz}\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{\cos\gamma}{l}\right] + 2\omega i\left[\frac{d\psi_1}{dy}\frac{\cos\alpha}{l} + \frac{d\psi_1}{dx}\frac{\cos\beta}{l}\right].$$

Mais nous avons trouvé plus haut:

$$\frac{\cos\alpha}{l} = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\frac{x}{\rho^2}$$

$$\frac{\cos\beta}{l} = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\frac{y}{\rho^2 - b^2}$$

$$\frac{\cos\gamma}{l} = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\frac{z}{\rho^2 - c^2}$$

d'où:

$$\frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{l\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)$$

$$= \lambda\left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2 - b^2} + \frac{d\psi_1}{dz}\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{\rho^2 - c^2}\right] + 2\omega i\left[\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2}\right]$$

ou enfin

$$(6)\qquad \lambda\left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2}+\frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2-b^2}+\frac{d\psi_1}{dz}\left(1-\frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{\rho^2-c^2}\right]$$

$$+\ 2\omega i\left[\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2}-\frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2-b^2}\right]=\frac{\lambda(4\omega^2-\lambda^2)}{\rho\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}\sum A_k M_k N_k.$$

Le problème est donc ramené à trouver une fonction ψ_1 qui satisfasse à la dernière des équations (4) à l'intérieur de l'ellipsoïde et aux équations (5) et (6) sur la surface de l'ellipsoïde.

Supposons donc d'abord que ω soit nul; la dernière équation (4) se réduira à

$$\Delta\psi_1 = 0$$

de sorte que nous satisferons à la fois aux équations (4) et (5) en faisant:

$$\psi_1 = 4\pi\sum A_k\left(\frac{R_1^0 S_1^0}{3}-\frac{R_k^0 S_k^0}{2n+1}\right)\frac{R_k M_k N_k}{R_k^0}.$$

Dans cette expression R_k^0 est la valeur que prend R_k sur la surface de l'ellipsoïde.

De cette expression, on déduira pour tous les points de la surface de l'ellipsoïde:

$$\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2}+\frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2-b^2}+\frac{d\psi_1}{dz}\frac{z}{\rho^2-c^2}=4\pi\sum A_k\left(\frac{R_1 S_1}{3}-\frac{R_k S_k}{2n+1}\right)\frac{\frac{dR_k}{d\rho}}{\rho R_k}M_k N_k$$

de sorte que l'équation (6) se réduit à:

$$-\ 4\pi\lambda\sum A_k\left(\frac{R_1 S_1}{3}-\frac{R_k S_k}{2n+1}\right)\frac{\frac{dR_k}{d\rho}}{\rho R_k}M_k N_k=\frac{-\lambda^3}{\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}\sum A_k M_k N_k.$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut et il suffit que tous les coëfficients A_k soient nuls, excepté un que nous appellerons A_p, et que λ satisfasse à l'équation:

$$4\pi\left(\frac{R_1 S_1}{3}-\frac{R_p S_p}{2n+1}\right)\frac{dR_p}{d\rho}\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}-\lambda^2 R_p = 0.$$

On est donc ainsi conduit pour les périodes des diverses petites oscillations possibles aux mêmes valeurs que par l'équation (1).

Nous allons maintenant supposer que ω n'est pas nul.

Posons

$$1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2} = \tau^2, \qquad z = \tau z'$$

la dernière des équations (4) deviendra:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\psi_1}{dy^2} + \frac{d^2\psi_1}{dz'^2} = 0.$$

Quand le point (x, y, z) décrira l'ellipsoïde E qui a pour équation:

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

le point (x, y, z') décrira l'ellipsoïde E' qui a pour équation:

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{\tau^2 z'^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Nous appellerons R', M' et N' les fonctions de Lamé formées à l'aide de l'ellipsoïde E', et l' la quantité qui joue par rapport à l'ellipsoïde E' le même rôle que l joue par rapport à l'ellipsoïde E.

Nous appellerons $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface de E'. Nous poserons de même:

$$\rho^2 - c'^2 = \frac{\rho^2 - c^2}{\tau^2}$$

et

$$P' = l'\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c'^2)}$$

de même que l'on a, d'après les notations de Liouville:

$$P = l\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}.$$

Il viendra alors pour un point de la surface de E':

$$\frac{\cos\alpha'}{P'} = \frac{x}{\rho^2}, \qquad \frac{\cos\beta'}{P'} = \frac{y}{\rho^2 - b^2}, \qquad \frac{\cos\gamma'}{P'} = \frac{z}{\rho^2 - c'^2} = \frac{\tau^2 z}{\rho^2 - c^2}$$

d'où:

$$\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2}+\frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2-b^2}+\frac{d\psi_1}{dz}\frac{\tau^2 z}{\rho^2-c^2}=\frac{1}{P'}\left(\frac{d\psi_1}{dx}\cos\alpha'+\frac{d\psi_1}{dy}\cos\beta'+\frac{d\psi_1}{dz'}\cos\gamma'\right)$$

$$\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2}-\frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2-b^2}=\frac{1}{P'}\left(\frac{d\psi_1}{dy}\cos\alpha'-\frac{d\psi_1}{dx}\cos\beta'\right).$$

Considérons maintenant un point quelconque de l'ellipsoïde E ayant pour coordonnées elliptiques μ et ν et pour coordonnées ordinaires x, y et z; considérons ensuite le point correspondant de l'ellipsoïde E' ayant pour coordonnées ordinaires x, y et $z'=\frac{z}{\tau}$ et pour coordonnées elliptiques μ' et ν' (dans le système dérivé de l'ellipsoïde E'). Soit M'_q une fonction quelconque de Lamé de la coordonnée μ' et N'_q la fonction conjuguée de la coordonnée ν'. A chaque point de E correspond comme nous l'avons vu un point de E' et réciproquement. A chaque système de valeurs de μ et ν correspond donc un système de valeurs de μ' et ν' et réciproquement, de sorte que le produit $M'_q N'_q$ qui dépend de μ' et ν' pourra aussi être regardé comme fonction de μ et ν; à ce titre, il pourra être développé en une série ordonnée suivant les produits de Lamé $M_k N_k$ dérivés de l'ellipsoïde E. On aura donc:

$$M'_q N'_q = \Sigma B_{k,q} M_k N_k. \tag{7}$$

Nous allons maintenant, à l'aide de la remarque de Liouville dont nous avons déjà fait usage plus haut, montrer que dans le second membre de l'identité (7) n'entrent que des fonctions de Lamé de même ordre que M'_q.

En effet, d'après cette remarque de Liouville si l'on pose:

$$X=\frac{x}{\rho},\qquad Y=\frac{y}{\sqrt{\rho^2-b^2}},\qquad Z=\frac{z}{\sqrt{\rho^2-c^2}}=\frac{z'}{\sqrt{\rho^2-c'^2}}$$

le produit $M'_q N'_q$ sera sur la sphère:

$$X^2+Y^2+Z^2=1$$

une fonction sphérique de même ordre que M'_q et le produit $M_k N_k$ une fonction sphérique de même ordre que M_k. L'identité (7) ne peut donc subsister que si toutes les fonctions de Lamé qui entrent dans le second membre sont de même ordre que M'_q.

Ce second membre n'est donc pas une série infinie, mais un polynôme formé d'un nombre fini de termes.

De plus dans ce second membre ne peuvent entrer que des fonctions de Lamé présentant les mêmes symétries que M'_q. Si par exemple M'_q est divisible par $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, il devra en être de même de toutes les fonctions M_k.

Nous renverserons l'identité (7) en écrivant:

$$M_k N_k = \sum C_{k,q} M'_q N'_q.$$

La fonction ψ_1 devant satisfaire à la dernière des équations (4) pourra s'écrire:

$$\psi_1 = \sum D_q R'_q M'_q N'_q$$

les D_q étant des coëfficients constants et les R'_q, M'_q, N'_q étant des fonctions de Lamé dérivées de l'ellipsoïde E'.

A la surface de cet ellipsoïde, nous aurons:

$$\psi_1 = \sum\sum D_q B_{k,q} R'_q M_k N_k$$

en tenant compte de (7), de sorte que l'équation (5) se ramènera aux équations:

$$(8) \qquad - 4\pi A_k \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1}\right) = \sum_q D_q B_{k,q} R'_q.$$

On a d'autre part à la surface de E':

$$\frac{1}{P'}\left(\frac{d\psi_1}{dx}\cos\alpha' + \frac{d\psi_1}{dy}\cos\beta' + \frac{d\psi_1}{dz}\cos\gamma'\right) = \sum D_q \frac{dR'_q}{\rho d\rho} M'_q N'_q.$$

D'autre part il résulte de l'analyse faite plus haut à propos des moments des quantités de mouvement que l'on a sur toute la surface de E'

$$\frac{d(R'_q M'_q N'_q)}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d(R'_q M'_q N'_q)}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2} = \sum F_{q,k} M'_k N'_k$$

les F étant des constantes et les M'_k et N'_k des fonctions de Lamé de même ordre que M'_q, mais ne présentant pas les mêmes symétries. Si M'_q contient en facteur $\sqrt{\mu'^2 - c'^2}$ il en est de même de M'_k et réciproque-

ment, mais si M'_q contient en facteur $\sqrt{\mu'^2 - b'^2}$, M'_k ne le contiendra pas et inversement.

Nous écrirons en tenant compte de (7)

$$\Sigma F_{q,k} M'_k N'_k = \Sigma G_{q,k} M_k N_k$$

ce qui donnera enfin:

$$\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2} = \Sigma\Sigma D_q G_{q,k} M_k N_k.$$

L'équation (6) se ramène alors aux égalités:

$$\frac{A_k\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \lambda\Sigma_q D_q B_{k,q}\frac{dR'_q}{\rho d\rho} + 2\omega i\Sigma_q D_q G_{q,k}. \tag{9}$$

Il s'agit maintenant de disposer de λ, des D_q et des A_k de façon à satisfaire aux égalités (8) et (9).

Or on pourra arriver à ce résultat en supposant d'abord que tous les A_k et tous les D_q sont nuls, sauf ceux qui se rapportent à des fonctions de Lamé d'un certain ordre, d'ordre n par exemple. Il restera alors $2n + 1$ équations (8) et $2n + 1$ équations (9) entre λ, les $2n + 1$ coëfficients A_k et les $2n + 1$ coëfficients D_q qui se rapportent aux fonctions de Lamé d'ordre n et qui par conséquent ne sont pas nuls, d'après la convention précédente. Cela fait en tout $4n + 2$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $4n + 2$ coëfficients A_k et D_q.

Si on élimine ces $4n + 2$ coëfficients entre ces $4n + 2$ équations par le moyen d'un déterminant, on obtiendra une équation qui déterminera les périodes λ des oscillations infiniment petites de l'ellipsoïde. Il importe de remarquer que λ n'entrera pas dans cette équation seulement explicitement, mais que les coëfficients $B_{k,q}$, $G_{q,k}$, $\frac{dR'_q}{d\rho}$, R'_q qui entrent également dans cette équation dépendent de λ. Néanmoins, même en tenant compte de cette circonstance, l'équation est algébrique en λ.

Il y aura une infinité de pareilles équations en λ que l'on obtiendra en considérant successivement les fonctions de Lamé du 2[d], du 3[me], ..., du n[e] ordre, etc. Pour la stabilité il faut et il suffit qu'aucune de ces équations n'ait de racine imaginaire.

Ce qu'il faut surtout retenir, c'est que dans un même système d'équations (8) et (9) n'entrent que les coëfficients qui se rapportent aux fonctions de LAMÉ d'un même ordre.

Si donc nous écrivons la valeur de ψ relative à une oscillation infiniment petite obtenue en considérant l'une des solutions d'un système d'équations (8) et (9), on trouvera:

$$\psi = e^{\lambda i t} \sum D_q M'_q N'_q R'_q.$$

Dans la somme du second membre n'entrent que des fonctions de LAMÉ d'un même ordre, d'ordre n par exemple. Une pareille oscillation infiniment petite s'appellera un mouvement harmonique d'ordre n.

Il résulte de ce qui précède que deux mouvements harmoniques d'ordres différents sont indépendants l'un de l'autre, c'est à dire que l'on peut imposer à la masse fluide, comme liaison, la condition de ne pouvoir éprouver d'autres déplacements que des mouvements harmoniques d'ordre n sans que les $2n + 1$ mouvements harmoniques d'ordre n possibles soient altérés.

Nous pouvons encore énoncer ce résultat d'une autre manière.

Dans un mouvement harmonique d'ordre n, on a sur la surface de l'ellipsoïde de E:

$$V = \psi = e^{\lambda i t} \sum A_k M_k N_k$$

M_k et N_k étant des fonctions de LAMÉ d'ordre n et les A_k des coëfficients constants. Sur la surface de cet ellipsoïde, le potentiel V s'exprime donc par une somme de LAMÉ d'ordre n.

Imposons-nous donc la liaison suivante: que les déplacements de notre masse fluide soient toujours tels que le potentiel s'exprime à la surface libre par une somme de LAMÉ d'ordre n. En tenant compte de cette liaison, on trouvera que certaines petites oscillations de la masse sont possibles. On cherchera tous les systèmes d'oscillations possibles en supposant que la valeur de V à la surface soit assujettie à être une somme de LAMÉ d'ordre 2, 3, ..., n, ..., ad inf.; on composera ensuite tous ces systèmes d'oscillations, d'après la règle ordinaire de la composition des petits mouvements, et on obtiendra de la sorte tous les petits mouvements possibles du système, en le supposant délivré de toutes ses liaisons.

Mais il y a plus. J'ai dit que dans une même équation (8) ou dans une même équation (9) ne peuvent entrer que des coëfficients A_k et D_q se rapportant à des fonctions de Lamé d'un même ordre. On peut ajouter que dans une même équation (8) ou dans une même équation (9) ne peuvent entrer que des A_k et des D_q se rapportant tous à des fonctions de Lamé qui ont comme facteur $\sqrt{c^2-\mu^2}$ ou $\sqrt{c'^2-\mu'^2}$; ou bien des A_k et des D_q se rapportant tous à des fonctions de Lamé qui n'admettent pas ce facteur. Si la fonction M_k ne contient pas le facteur $\sqrt{c^2-\mu^2}$, le produit M_kN_k est symétrique par rapport au plan des xy; (c'est à dire qu'il ne change pas quand on change z en $-z$) il ne l'est pas dans le cas contraire.

Voici quelle est la conséquence de ce fait. Supposons que l'on cherche à trouver tous les mouvements harmoniques possibles d'ordre n que nous appellerons H. Imposons-nous d'abord la liaison suivante: que la valeur superficielle de V soit une somme de Lamé d'ordre n et symétrique par rapport au plan des xy. Nous trouverons qu'en tenant compte de cette liaison, il y a certaines oscillations possibles H'. Imposons-nous maintenant une autre liaison: que la valeur superficielle de V soit une somme de Lamé d'ordre n et change de signe avec z. En tenant compte de cette liaison, il y aura certaines oscillations possibles H''. Si nous composons ensuite les oscillations H' et H'' d'après la règle ordinaire de la composition des petits mouvements, nous aurons tous les mouvements H possibles.

Ces règles permettent d'envisager séparément les mouvements harmoniques d'ordre n sans tenir compte des mouvements harmoniques d'ordre différent qui pourraient exister simultanément.

Un cas particulier où les équations (8) et (9) se simplifient considérablement, c'est celui où l'ellipsoïde E et par conséquent l'ellipsoïde E' sont de révolution. Il arrive alors que tous les coëfficients $B_{k,q}$ sont nuls quand k est différent de q et que l'on peut prendre:

$$B_{k,k} = 1, \qquad G_{q,k} = F_{q,k}.$$

Une dernière remarque: pour que l'analyse précédente puisse s'appliquer, il faut, à ce que l'on croit d'abord, que l'on ait:

$$0 < \frac{\rho^2 - c^2}{\tau^2} < \rho^2 - b^2$$

ce qui obligerait λ à rester compris entre certaines limites. Cependant il est aisé de voir que ces résultats subsistent quelle que soit l'hypothèse faite sur la valeur de λ. En effet il semble d'abord que les fonctions de Lamé R', M' et N' ne sont définies que lorsque les axes de l'ellipsoïde E', d'où elles dérivent, sont réels et si l'axe des z est le petit axe dans E' comme dans E. Mais le produit $R'M'N'$ est un polynôme entier en x, y et z qui est parfaitement défini dans tous les cas possibles et qui jouit toujours des mêmes propriétés.

Si même $\lambda > 2\omega$, c'est à dire si τ^2 est négatif et si l'un des axes de E' devient imaginaire, les résultats de l'analyse précédente subsistent encore.

§ 14. *Stabilité des ellipsoïdes.*

Pour reconnaître si un ellipsoïde de révolution ou un ellipsoïde de Jacobi est stable, il faut se reporter au § 7. D'après la règle de ce paragraphe, qui était soumise, je le rappelle, à certaines restrictions, une figure d'équilibre ne peut jouir de la stabilité séculaire qu'à la condition que tous les coëfficients de stabilité soient négatifs. Si cette règle était applicable sans modifications à l'ellipsoïde de Jacobi, cette figure n'aurait jamais la stabilité séculaire, car un de ses coëfficients de stabilité est toujours positif; c'est celui qui se rapporte à la fonction $R'_{0,2}$. Mais la règle du § 7 n'est applicable, comme nous l'avons vu, que si dans tous les mouvements possibles le travail des résistances passives est toujours négatif sans pouvoir jamais être nul. Ce n'est pas le cas si l'on envisage une masse fluide isolée dans l'espace, car si une pareille masse se déplace sans se déformer, il n'y a pas de résistance passive. Si au contraire la rotation de la masse fluide était déterminée par celle d'un axe rigide qui la traverserait de part en part et qui l'entraînerait par frottement (comme dans les expériences de Plateau par exemple), tout déplacement produirait une résistance passive et l'ellipsoïde de Jacobi serait toujours instable.

Mais ce cas est sans intérêt. Envisageons donc une masse isolée dans l'espace et voyons comment doit être modifiée la règle du § 7.

Considérons deux systèmes d'axes: un système fixe et un système mobile tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe

des z. Supposons que la masse fluide ait une position d'équilibre relatif dans laquelle elle soit animée d'une vitesse de rotation ω par rapport aux axes fixes, et par conséquent en repos par rapport aux axes mobiles. Soit, dans cette position, I_0 son moment d'inertie par rapport à l'axe des z et U_0 son énergie potentielle par rapport aux axes fixes. Considérons maintenant une configuration de la masse fluide voisine de la figure d'équilibre et telle que cette masse cesse d'être en repos par rapport aux axes mobiles. Soient, dans cette nouvelle position, I et U les valeurs du moment d'inertie et de l'énergie potentielle. Soit T la demi-force vive relative par rapport aux axes mobiles; soit m la masse d'un des points du fluide; r sa distance à l'axe des z, et $\omega + \partial\omega$ sa vitesse angulaire autour de cet axe. Les équations de la conservation de l'énergie et de la conservation des moments des quantités de mouvement nous donneront:

$$T + \omega \sum mr^2 \partial\omega + \frac{\omega^2 I}{2} + U = \frac{\omega^2 I_0}{2} + U_0 + h$$

$$\omega I + \sum mr^2 \partial\omega = \omega I_0$$

(h étant une constante qui est très petite si les déplacements initiaux et les vitesses initiales sont très petits ce que nous supposons) d'où:

$$T - \frac{\omega^2 I}{2} + U = U_0 - \frac{\omega^2 I_0}{2} + h.$$

Mais on a:

$$T > \frac{1}{2} \sum mr^2 \partial\omega^2 > \frac{1}{2} \frac{(\sum mr^2 \partial\omega)^2}{\sum mr^2} = \frac{\omega^2}{2} \frac{(I - I_0)^2}{I}$$

d'où

$$U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0) + \frac{\omega^2}{2} \frac{(I - I_0)^2}{I} < h.$$

Si donc on a pour toutes les configurations très voisines de la figure d'équilibre:

$$(1) \qquad U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0) + \frac{\omega^2}{2} \frac{(I - I_0)^2}{I} > 0,$$

on sera certain que l'équilibre est stable. S'il y a des résistances passives, h ne sera pas une constante, mais ira constamment en diminuant; donc *a fortiori*, il y aura encore stabilité si la condition (1) est remplie. Cette condition est donc *suffisante* pour qu'il y ait stabilité séculaire.

D'après la règle du § 7, la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité séculaire était que l'expression

$$V - \frac{\omega^2 I}{2}$$

fût minimum, c'est à dire que:

$$U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0) > 0.$$

On voit que la règle actuelle est plus favorable à la stabilité.

D'ailleurs la condition (1) peut encore s'énoncer d'une autre manière. Elle signifie que l'expression:

$$U + \frac{\omega^2}{2}\frac{I_0^2}{I} \tag{2}$$

doit être minimum pour la figure d'équilibre (Cf. Tait et Thomson, *Treatise on Natural Philosophy*, § 778'' [j] et [k]).

Il faut voir maintenant si cette condition (1) est nécessaire pour qu'il y ait stabilité séculaire. Nous avons vu au § 7 que les déplacements infiniment petits x_i des diverses molécules d'un système à partir d'une position d'équilibre relatif pouvaient s'exprimer de la façon suivante:

$$x_i = \Sigma A_m [i, m] e^{\lambda_m t}$$

les A_m étant des constantes arbitraires d'intégration, tandis que les $[i, m]$ et les λ_m sont des constantes dépendant des équations différentielles données.

Pour qu'il y ait stabilité séculaire, il faut que tous les λ aient leur partie réelle nulle ou négative.

Plaçons-nous d'abord dans les conditions où la règle du § 7 est applicable, c'est à dire où tout déplacement entraîne une résistance passive. Tous les λ devront alors avoir leur partie réelle négative, et tous les x_i tendre vers 0 quand t croîtra indéfiniment. L'expression suivante:

$$\Phi = T + U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0)$$

(si l'on néglige les cubes des x_i, ou ce qui revient au même les cubes des A_m) est une forme quadratique par rapport aux A_m.

Cette forme doit tendre vers o quand t croît indéfiniment. Mais d'après la nature même des résistances passives, cette forme doit aller constamment en diminuant. Il faut donc que sa valeur initiale soit toujours positive quelles que soient les constantes arbitraires A_m. La forme Φ est donc toujours définie positive, c'est à dire que $U - \frac{\omega^2}{2} I$ doit être minimum dans la position d'équilibre. C'est là la démonstration de la règle du § 7.

Supposons maintenant que cette règle ne soit plus applicable, c'est à dire que certains déplacements n'entraînent pas de résistances passives. Il pourra arriver alors s'il y a stabilité séculaire que parmi les λ_m, il y en ait un certain nombre que j'appellerai les λ_p et dont la partie réelle est nulle, pendant que d'autres que j'appellerai les λ_q auront leur partie réelle négative.

D'après cela la forme Φ ne tendra pas vers o, en général, quand t croîtra indéfiniment; elle partira de sa valeur initiale Φ_0 et tendra vers une certaine valeur limite Φ_1 que l'on obtiendra en remplaçant dans Φ_0 tous les A_q par o et en conservant aux A_p leurs valeurs initiales. Comme la forme Φ doit aller constamment en diminuant, on devra avoir:

$$\Phi_0 > \Phi_1$$

quelles que soient les valeurs des constantes arbitraires A_p et A_q. Pour cela il faut que la forme quadratique Φ soit la somme de deux autres, la première ne contenant que les A_p, la seconde *définie positive* et ne contenant que les A_q.

Si donc dans la forme Φ_0 on annule tous les A_p, cette forme deviendra définie positive.

Dans le cas qui nous occupe, et si nous supposons que le centre de gravité de notre masse soit fixe, il n'y a que trois déplacements qui n'entraînent pas de résistance passive, ce sont les rotations autour des trois axes. Il y a donc au plus six des λ_m dont la partie réelle est nulle; en d'autres termes, il y a au plus six A_p. En réalité, il n'y a que quatre A_p. On obtiendra tous les mouvements pour lesquels tous les A_q sont nuls, en supposant que les diverses molécules de la masse

fluide tournent d'un mouvement uniforme, à la façon des différentes parties d'un même corps solide, autour d'un axe quelconque et avec une vitesse quelconque. On obtiendra tous les mouvements pour lesquels tous les A_p sont nuls, en considérant les déplacements de la masse fluide qui sont tels que le moment de la quantité de mouvement relatif par rapport aux axes mobiles soit nul. Pour qu'il y ait stabilité séculaire, il faut que la forme Φ soit toujours positive quand les déplacements initiaux et les vitesses initiales des diverses molécules sont telles que tous les A_p soient nuls, c'est à dire que le moment de la quantité de mouvement soit nul. Or il est aisé de voir que cela ne peut avoir lieu que si l'expression (2) est un minimum.

C'est donc là la condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire.

L'expression:

$$U_0 - U - \frac{\omega^2}{2}(I_0 - I) = T - \Phi$$

est aussi une forme quadratique par rapport aux A_m quand on néglige les cubes de ces quantités. Cette forme peut être réduite en une somme de carrés et ce sont les coëfficients de ces carrés que nous avons appelés jusqu'ici coëfficients de stabilité. D'après ce qui précède, il convient maintenant d'envisager la forme:

$$F = U_0 - U - \frac{\omega^2}{2}(I_0 - I) - \frac{\omega^2}{2}\frac{(I - I_0)^2}{I}.$$

Cette forme peut aussi être réduite en une somme de carrés et j'appellerai les coëfficients de ces carrés coëfficients de stabilité corrigés. Ils devront être tous négatifs pour la stabilité séculaire.

Supposons que la forme d'équilibre relatif soit un ellipsoïde et que la figure troublée soit définie par la distance ζ d'un point de sa surface à l'ellipsoïde comptée normalement à l'ellipsoïde.

Si l'on a:

$$\zeta = \sum A_i l M_i N_i$$

nous avons vu au § 9 que les coëfficients de stabilité s'écrivent:

$$-\frac{4\pi}{2}\int\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1}\right) l M_i^2 N_i^2 d\omega.$$

Il est aisé de voir que si l'on néglige le cube des A_i il viendra:

$$-\frac{\omega^2}{2}\frac{(I-I_0)^2}{I} = -(BA + B'A')^2$$

B et B' étant des coëfficients qui ne dépendent que des axes de l'ellipsoïde pendant que A et A' sont les coëfficients de:

$$lM^1_{0,2}N^1_{0,2} \quad \text{et} \quad lM^1_{2,2}N^1_{2,2}$$

dans l'expression de ζ.

Il résulte de là que les coëfficients de stabilité corrigés ne différeront pas des coëfficients de stabilité primitifs, si l'on excepte ceux qui se rapportent aux fonctions de Lamé:

$$R^1_{0,2} \quad \text{et} \quad R^1_{2,2}.$$

Or si l'on se reporte au paragraphe précédent, on verra que nous pouvons envisager séparément les mouvements harmoniques des divers ordres, et que pour qu'il y ait stabilité, il faut et il suffit que cette stabilité existe à la fois en ce qui concerne les mouvements harmoniques de chaque ordre.

Mais d'après ce que nous venons de dire des coëfficients de stabilité, la règle du § 7 s'appliquera aux mouvements harmoniques de tous les ordres si l'on excepte le second.

Pour qu'il y ait stabilité séculaire en ce qui concerne les mouvements du n^e ordre, il faut et il suffit que les coëfficients de stabilité corrigés qui se rapportent aux fonctions de Lamé du n^e ordre soient tous négatifs; or ils ne diffèrent pas des coëfficients primitifs si $n > 2$.

Considérons d'abord les mouvements du 2^d ordre; ils ne seront pas altérés comme nous l'avons vu, si nous nous imposons comme liaison la condition que ces mouvements soient seuls possibles. Cela revient à assujettir la figure de la masse fluide à la condition de rester toujours ellipsoïdale.

Pour que la stabilité soit séculaire, en tenant compte de cette liaison, il faut et il suffit que l'expression:

$$U + \frac{\omega^2 I_0^2}{2I} \tag{2}$$

soit plus grande pour un ellipsoïde quelconque que pour l'ellipsoïde d'équilibre.

L'expression ωI_0 est le moment de la quantité de mouvement; c'est une donnée de la question. Les quantités qui définiront l'ellipsoïde seront deux des axes, a et b; le troisième axe par rapport auquel on prendra les moments d'inertie sera fonction des deux premiers, puisque le volume est supposé donné.

A tout système de valeurs positives de a et b correspond une valeur de (2) qui tend vers une limite nulle ou positive quand l'un des axes a ou b tend vers o ou vers ∞ d'une manière quelconque.

Si donc on appelle $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{N}_3$ le nombre des minima *négatifs* de l'expression (2), celui des maxima négatifs, et celui des ellipsoïdes d'équilibre qui correspondent à une valeur négative de (2) qui n'est ni un maximum ni un minimum, on aura par simple raison de continuité et en vertu des principes bien connus de l'*Analysis Situs:*

$$(3)\qquad \begin{gathered} \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_3 = 1 \\ \mathfrak{N}_1 > 0. \end{gathered}$$

Pour les valeurs de ωI_0 qui sont inférieures à une certaine limite, il n'y a qu'un seul ellipsoïde d'équilibre qui est de révolution. Si les axes de cet ellipsoïde sont ρ, ρ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ces valeurs de ρ satisferont à l'inégalité:

$$(4)\qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{0,2} S^1_{0,2}}{5} > 0.$$

J'appellerai un pareil ellipsoïde: *ellipsoïde peu aplati* pour le distinguer de ceux qui ne satisfont pas à l'inégalité (4).

Puisque nous n'avons qu'une seule figure d'équilibre, les inégalités (3) ne peuvent subsister que si cette figure correspond à un minimum.

Les ellipsoïdes peu aplatis sont donc stables en ce qui concerne les mouvements du 2[d] ordre.

Pour les valeurs plus grandes de ωI_0, il y a trois figures d'équilibre: un ellipsoïde de révolution ne satisfaisant pas à l'inégalité (4) (je dirai qu'il est *très aplati*) et deux ellipsoïdes de Jacobi égaux entre eux et ne différant l'un de l'autre que par la permutation de a et de b. Il faut donc que les deux ellipsoïdes de Jacobi correspondent tous deux à un minimum de (2) ou que cela ne soit vrai d'aucun des deux. Dans ces

conditions, les inégalités (3) ne peuvent subsister que si les ellipsoïdes de Jacobi correspondent à un minimum et si l'ellipsoïde de révolution ne correspond ni à un maximum, ni à un minimum.

Donc en ce qui concerne les mouvements du 2ᵈ ordre, les ellipsoïdes de Jacobi sont toujours stables et les ellipsoïdes très aplatis toujours instables.

Si par conséquent nous imposons à la figure de la masse fluide la condition de rester ellipsoïdale, les ellipsoïdes peu aplatis et ceux de Jacobi seront stables, pendant que les ellipsoïdes très aplatis seront instables. (Cf. Tait et Thomson, *Natural Philosophy,* 778″, [*f*]).

Voyons maintenant si la stabilité séculaire subsiste encore lorsqu'on considère les mouvements harmoniques d'ordre supérieur.

Cela est évident en ce qui concerne les ellipsoïdes peu aplatis. Considérons en effet un ellipsoïde de révolution qui, se réduisant d'abord à une sphère, aille ensuite en s'aplatissant de plus en plus, de façon que si ses axes sont ρ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ρ décroisse de $+\infty$ à c. Nous avons vu au § 11 que tous les coëfficients de stabilité sont d'abord négatifs; puis qu'un certain nombre d'entre eux s'annulent successivement pour devenir positifs. A la fin de ce même paragraphe, nous avons démontré que le premier de ces coëfficients qui s'annule ainsi, c'est celui qui correspond à la fonction de Lamé $R^1_{0,2}$ qui se réduit à ρ^2 pour $b^2 = 0$. Si donc ce coëfficient est négatif, c'est à dire si l'inégalité (4) est satisfaite, tous les autres coëfficients seront aussi négatifs. L'ellipsoïde peu aplati est donc stable. (Cf. loc. cit. 778″ [*b*]).

Quant à l'ellipsoïde de Jacobi, il sera stable en ce qui concerne les mouvements harmoniques du n^e ordre, pourvu que les coëfficients de stabilité (corrigés ou non, cela revient au même si $n > 2$) qui affectent des fonctions de Lamé du n^e ordre soient tous négatifs. Or nous avons vu au § 12 que tous les coëfficients de stabilité du n^e ordre restent tous négatifs pour tous les ellipsoïdes de Jacobi, à l'exception du coëfficient qui se rapporte à la fonction $R^1_{0,n}$ et que nous appellerons coëfficient principal du n^e ordre. Ce coëfficient principal, d'abord négatif pour les valeurs suffisamment petites de $\frac{b^2}{c^2}$ finit par s'annuler et par devenir positif quand on fait croître $\frac{b^2}{c^2}$.

Nous disons que l'ellipsoïde de Jacobi est *peu allongé* si $\frac{b^2}{c^2}$ est assez petit pour que tous les coëfficients principaux soient négatifs, et *très allongé* si $\frac{b^2}{c^2}$ est assez grand pour que l'un au moins des coëfficients principaux soit positif.

D'après ce que nous avons vu au § 12, il est certain que le premier de ces coëfficients principaux qui s'annule est celui du 3e ordre, de sorte que l'ellipsoïde limite qui sépare les ellipsoïdes peu allongés des ellipsoïdes très allongés, est celui dont les axes satisfont à la relation

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{0,3} S^1_{0,3}}{7} = 0.$$

D'après ce qui précède, les ellipsoïdes peu allongés seront stables et les ellipsoïdes très allongés instables en ce qui concerne les mouvements harmoniques d'ordre supérieur au second.

En résumé, si la figure de la masse fluide n'est assujettie à aucune condition, les ellipsoïdes de révolution peu aplatis et les ellipsoïdes de Jacobi *peu allongés jouiront de la stabilité séculaire, pendant que les ellipsoïdes de révolution très aplatis et les ellipsoïdes de* Jacobi *très allongés n'en jouiront pas.*

Ces derniers pourraient toutefois jouir de la stabilité ordinaire sans jouir de la stabilité séculaire. Il nous reste à examiner s'il en est ainsi.

Occupons-nous d'abord des petits mouvements harmoniques du second ordre des ellipsoïdes de révolution. Supposons donc, ce qui n'altère pas ces mouvements, que la figure de la masse fluide soit assujettie à rester ellipsoïdale.

D'après le paragraphe précédent, nous pouvons même (sans altérer les petits mouvements qu'il s'agit d'étudier) supposer que la valeur superficielle du potentiel V est assujettie non seulement à être exprimée par une somme de Lamé du 2d ordre, mais encore soit à être symétrique par rapport au plan des xy, soit au contraire à changer de signe avec z.

La seconde hypothèse est sans intérêt; elle nous conduirait simplement à une sorte de mouvement de précession. Tenons-nous donc à la première et supposons que la figure de la masse fluide est assujettie à être toujours un ellipsoïde ayant un axe dirigé suivant l'axe des z.

Soit

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - 1} = 1$$

l'ellipsoïde envisagé. Nous aurons à considérer les trois fonctions de Lamé $R_2 = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2} = \rho^2$, $R_{0,2}^1$ et $R_{2,2}^1$. Nous poserons donc:

$$P_1 = R_2 M_2 N_2 = xy$$

$$P_2 = R_{0,2}^1 M_{0,2}^1 N_{0,2}^1 = x^2 - y^2$$

$$P_3 = R_{2,2}^1 M_{2,2}^1 N_{2,2}^1 = 3x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 2.$$

Nous poserons de plus:

$$K_1 = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_{0,2}^1 S_{0,2}^1}{5}$$

$$K_2 = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_{2,2}^1 S_{2,2}^1}{5}.$$

Nous reprendrons d'ailleurs les notations du paragraphe précédent.

La fonction ψ_1 devant satisfaire à l'équation:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\psi_1}{dy^2} + \tau^2 \frac{d^2\psi_1}{dz^2} = 0$$

nous l'écrirons:

$$\psi_1 = A(x^2 - y^2) + Bxy + C\left(x^2 + y^2 - \frac{2z^2}{\tau^2}\right) + D$$

A, B, C et D étant des coëfficients constants qu'il s'agit de déterminer et qui jouent le même rôle que les D_q du paragraphe précédent.

L'équation (5) du paragraphe précédent devient:

$$\psi_1 = -4\pi[A'K_1(x^2 - y^2) + B'K_1 xy + C'K_2(3x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 2)]$$

A', B', C' étant des coëfficients constants, et elle doit devenir une identité en tenant compte de l'équation de l'ellipsoïde.

On trouve d'ailleurs:

$$\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2 - b^2} + \frac{d\psi_1}{dz}\frac{\tau^2 z}{\rho^2 - c^2} = 2A\frac{x^2 - y^2}{\rho^2} + 2B\frac{xy}{\rho^2}$$

$$+ 2C\left(\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} - \frac{2z^2}{\rho^2 - 1}\right)$$

$$\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2} = -\frac{4Axy}{\rho^2} + B\frac{x^2 - y^2}{\rho^2}$$

de sorte que l'équation (6) du paragraphe précédent devient:

$$\frac{x^2 - y^2}{\rho^2}(2A\lambda + 2B\omega i) + \frac{xy}{\rho^2}(2B\lambda - 8A\omega i) + 2C\lambda\left(\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} - \frac{2z^2}{\rho^2 - 1}\right)$$

$$= \frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{\rho^2\sqrt{\rho^2 - 1}}[A'(x^2 - y^2) + B'xy + C'(3x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 2)]$$

et elle doit être une identité en tenant compte de l'équation de l'ellipsoïde. On doit donc avoir:

$$(8)\quad \begin{gathered} A = -4\pi A'K_1, \qquad B = -4\pi B'K_1, \\ C + \frac{D}{\rho^2} = -4\pi C'K_2\left(3 - \frac{2}{\rho^2}\right), \quad -\frac{2C}{\tau^2} + \frac{D}{\rho^2 - 1} = \left(6C'K_2 + \frac{2C'K_2}{\rho^2 - 1}\right)4\pi \end{gathered}$$

et d'autre part:

$$(9)\quad \begin{gathered} 2A\lambda + 2B\omega i = \frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{\sqrt{\rho^2 - 1}}A', \qquad 2B\lambda - 8A\omega i = \frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{\sqrt{\rho^2 - 1}}B', \\ 2C = \frac{4\omega^2 - \lambda^2}{\sqrt{\rho^2 - 1}}C'\left(3 - \frac{2}{\rho^2}\right). \end{gathered}$$

Ce sont là les équations (8) et (9) du paragraphe précédent. On peut y satisfaire:

1° en supposant que C, D et C' sont nuls; ce qui donne en éliminant A, B, A', B'

$$\begin{vmatrix} \lambda\left[2 + \frac{4\omega^2 - \lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2 - 1}}\right], & 2\omega i \\ -8\omega i, & \lambda\left[2 + \frac{4\omega^2 - \lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2 - 1}}\right] \end{vmatrix} = 0$$

ou:

$$\lambda^2\left(2+\frac{4\omega^2-\lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2-1}}\right)^2-16\omega^2=0$$

ou:

$$\lambda\left(2+\frac{4\omega^2-\lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2-1}}\right)=\pm 4\omega.$$

Cette équation a toujours ses trois racines réelles si K_1 est positif; l'ellipsoïde jouit donc alors de la stabilité ordinaire, ce que l'on pouvait prévoir; car si K_1 est positif, l'ellipsoïde est peu aplati et, ayant la stabilité séculaire, il doit *a fortiori* jouir de la stabilité ordinaire.

Dans tous les cas, on trouve en prenant le signe $+$ par exemple:

$$\lambda(\lambda+2\omega)-8\pi K_1\sqrt{\rho^2-1}=0$$

avec $\lambda=2\omega$ pour la 3^e racine.

La condition de réalité des racines est donc:

$$K_1>-\frac{4\omega^2}{32\pi\sqrt{\rho^2-1}}.$$

Il résulte de là qu'alors même que K_1 devient négatif et que l'ellipsoïde devenant très aplati cesse de posséder la stabilité séculaire, il jouit encore pendant un certain temps de la stabilité ordinaire.

Cela a lieu bien que l'expression:

$$U+\frac{\omega^2 I_0}{2I} \tag{2}$$

ne soit ni minimum, ni maximum et qu'elle soit un »minimax» pour employer une expression consacrée en Angleterre. (Cf. loc. cit. 778″ [j]).

2°. Supposons maintenant que A, B, A', B' soient nuls et que C, D et C' ne le soient pas.

D'après la forme même des équations (8) et (9) que nous venons de former, il existera un mouvement harmonique du 2^d ordre qui satisfera à ces conditions. Il résulte également de la forme de ces équations, que ce mouvement harmonique ne sera pas altéré si l'on astreint la masse fluide à affecter la figure d'un ellipsoïde de révolution.

Mais si on introduit cette liaison, l'ellipsoïde de révolution quel que soit son aplatissement, jouira non seulement de la stabilité ordinaire, mais de la stabilité séculaire. (Cf. loc. cit. 778″ [a]).

Ainsi certains ellipsoïdes très aplatis possèdent encore la stabilité ordinaire. Il en est probablement de même de certains ellipsoïdes de JACOBI très allongés.

Ne nous occupons plus maintenant que de la stabilité séculaire et cherchons quelles sont, parmi les figures d'équilibre non ellipsoïdales dont nous avons démontré l'existence, celles qui possèdent cette stabilité. A cet effet nous pourrons appliquer le principe de l'échange des stabilités, ce que nous ne pourrions pas faire pour la stabilité ordinaire.

Soient S et S' deux séries linéaires de figures d'équilibre et F une figure de bifurcation commune à ces deux séries. Si pour cette figure, tous les coëfficients de stabilité sont négatifs, excepté un qui est nul, il y aura en général tant dans la série S que dans la série S', des figures très peu différentes de F qui seront stables. Si pour la figure F il y a des coëfficients de stabilité positifs, toutes les figures de S et de S' très peu différentes de F seront instables.

Nous avons considéré diverses séries linéaires de figures d'équilibre, à savoir: la série S des ellipsoïdes de révolution; la série S' des ellipsoïdes de JACOBI; les séries Σ qui ont une figure commune Φ avec la série S; les séries $S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots$ qui ont respectivement une figure commune $F_3, F_4, \ldots, F_n, \ldots$ avec la série S'. La figure F_n sera un ellipsoïde de JACOBI pour lequel on aura:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{0,n} S^1_{0,n}}{2n+1} = 0.$$

D'après ce qui précède, toutes les figures Φ seront des ellipsoïdes de révolution très aplatis, pour lesquels le coëfficient de stabilité relatif à la fonction de LAMÉ $R^1_{0,2}$, sera positif. Donc toutes les figures des séries Σ n'auront pas la stabilité séculaire; c'est à dire qu'elles seront instables pourvu que le fluide soit visqueux et si peu qu'il le soit. Cela n'est vrai toutefois que pour celles de ces figures qui diffèrent très peu de l'ellipsoïde et qui sont les seules dont nous sachions quelque chose. Il n'est pas impossible que les séries Σ contiennent des figures stables très différentes de l'ellipsoïde.

Toutes les figures F_3, F_4, ... sont des ellipsoïdes très allongés pour lesquels un certain nombre de coëfficients de stabilité sont positifs. Un seul est excepté; c'est l'ellipsoïde limite qui sépare les ellipsoïdes très allongés des ellipsoïdes peu allongés et pour lequel tous les coëfficients de stabilité *corrigés* sont négatifs excepté un qui est nul.

Nous avons vu au § 12 que cet ellipsoïde limite n'est autre que F_3.

Donc les figures peu différentes de l'ellipsoïde sont instables (séculairement) dans les séries S_4, S_5, ..., S_n; et stables dans la série S_3.

La forme d'équilibre représentée dans la figure p. 347 est donc une forme d'équilibre stable.

§ 15. *Conclusions.*

Les ellipsoïdes ne sont pas les seules figures d'équilibre que puisse affecter une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi de Newton et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe. Si on laisse de côté certaines formes d'équilibre où la masse en question se subdivise en deux ou plusieurs corps isolés, et d'autres où elle prend une configuration annulaire, il existe encore une infinité de séries de figures d'équilibre.

Toutes ces figures sont symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. En outre elles ont un certain nombre de plans de symétrie passant par l'axe (elles en ont toutes au moins un) et certaines d'entre elles sont de révolution.

Parmi ces séries de figures, il n'y en a qu'une qui est stable et elle a deux plans de symétrie seulement (voir la figure p. 347).

Les ellipsoïdes de révolution sont stables s'ils sont moins aplatis que celui qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi; les ellipsoïdes de Jacobi sont stables s'ils sont assez peu allongés.

Dans ces conditions la stabilité subsiste quand même le fluide est visqueux.

Les ellipsoïdes de révolution qui sont plus aplatis que celui qui est

en même temps un ellipsoïde de JACOBI, mais dont l'aplatissement reste inférieur à une certaine limite, sont stables si le fluide est parfaitement dépourvu de viscosité; ils ne le sont plus si le fluide est visqueux et si peu qu'il le soit.

Considérons une masse fluide homogène animée originairement d'un mouvement de rotation; imaginons que cette masse se contracte en se refroidissant lentement, mais de façon à rester toujours homogène. Supposons que le refroidissement soit assez lent et le frottement intérieur du fluide assez fort pour que le mouvement de rotation reste le même dans les diverses portions du fluide. Dans ces conditions le fluide tendra toujours à prendre une figure d'équilibre séculairement stable. Le moment de la quantité de mouvement restera d'ailleurs constant.

Au début, la densité étant très faible, la figure de la masse est un ellipsoïde de révolution très peu différent d'une sphère. Le refroidissement aura d'abord pour effet d'augmenter l'aplatissement de l'ellipsoïde, qui restera cependant de révolution. Quand l'aplatissement sera devenu à peu près égal à $\frac{2}{5}$, l'ellipsoïde cessera d'être de révolution et deviendra un ellipsoïde de JACOBI. Le refroidissement continuant, la masse cessera d'être ellipsoïdale; elle deviendra dissymétrique par rapport au plan des yz et elle affectera la forme représentée dans la figure p. 347. Comme nous l'avons fait observer à propos de cette figure, l'ellipsoïde semble se creuser légèrement dans sa partie moyenne, mais plus près de l'un des deux sommets du grand axe; la plus grande partie de la matière tend à se rapprocher de la forme sphérique, pendant que la plus petite partie sort de l'ellipsoïde par un des sommets du grand axe, comme si elle cherchait à se détacher de la masse principale.

Il est difficile d'annoncer avec certitude ce qui arrivera ensuite si le refroidissement continue, mais il est permis de supposer que la masse ira en se creusant de plus en plus, puis en s'étranglant dans la partie moyenne et finira par se partager en deux corps isolés.

On pourrait être tenté de chercher dans ces considérations une confirmation ou une réfutation de l'hypothèse de LAPLACE, mais on ne doit pas oublier que les conditions sont ici très différentes, car notre masse est homogène, tandis que la nébuleuse de LAPLACE devait être très fortement condensée vers le centre.

J'ai cru néanmoins devoir exposer ici ce qui arrive d'une masse homogène qui se contracte lentement et incessamment, car c'était le meilleur moyen de résumer sous une forme un peu plus concrète les principaux résultats de ce long mémoire et de faire comprendre quel intérêt il y aurait à combler les lacunes que j'y ai laissé subsister.

Paris, 16 Juillet 1885.

NOTE SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE

PAR

S. PINCHERLE
à BOLOGNE.

1. Soient $A(z)$, $\varphi(z)$ deux séries de LAURENT, la première convergente dans l'anneau circulaire, que j'indiquerai par $(|p^2|, 1)$, compris entre deux circonférences ayant le centre à l'origine et les rayons $|p^2|$ et 1 respectivement, et $|p| < 1$; la seconde convergente dans l'anneau circulaire (R, R_1). Je considère l'intégrale

$$I(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} A\left(\frac{x}{y}\right)\varphi(y)\frac{dy}{y}, \tag{1}$$

prise le long d'une circonférence concentrique et interne à l'anneau (R, R_1) et de rayon ρ. Cette intégrale représente aussi une série de LAURENT, et si l'on pose

$$A(z) = a_0 + \sum_1^\infty\left(a_n z^n + \frac{a'_n}{z^n}\right),$$

et

$$\varphi(z) = c_0 + \sum_1^\infty\left(c_n z^n + \frac{c'_n}{z^n}\right)$$

il vient

$$I(\varphi) = a_0 c_0 + \sum_1^\infty\left(a_n c_n x^n + \frac{a'_n c'_n}{x^n}\right). \tag{2}$$

Si l'on fixe $A\left(\frac{x}{y}\right)$, tandis que $\varphi(y)$ est une série de LAURENT quelconque, on peut regarder l'expression (1) comme un algorithme appliqué à *l'objet*

$\varphi(y)$, et dont le *résultat* est de même espèce que l'objet, c'est-à-dire une nouvelle série de Laurent. Il est à remarquer que l'anneau de convergence de cette nouvelle série contient toujours l'anneau $(|p^2|\rho, \rho)$.

En spécialisant la forme de la fonction $A(z)$, on trouvera des relations plus ou moins remarquables entre la fonction objet et la fonction résultat. Je me propose de revenir plus en détail sur ce sujet dans un autre travail; pour le moment je me bornerai à un cas particulier qui me semble assez intéressant.

2. Soit

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_n = \frac{1}{1-p^{2n}}, \qquad a'_n = \frac{1}{1-p^{-2n}};$$

il vient

$$I(\varphi) = \frac{c_0}{2} + \sum_1^\infty \left(\frac{c_n x^n}{1-p^{2n}} - \frac{c'_n p^{2n}}{(1-p^{2n})x^n}\right) = f(x), \tag{3}$$

et cette série est convergente dans l'anneau $(|p^2|R, R_1)$, qui contient $(|p^2|\rho, \rho)$. Il s'ensuit que la série $f(p^2x)$ est convergente dans l'anneau $\left(R, \frac{R_1}{|p^2|}\right)$, et par conséquent la différence

$$\Delta f(x) = f(x) - f(p^2x)$$

est une série de Laurent convergente dans l'anneau commun (R, R_1); et l'on trouve immédiatement que

$$\Delta f(x) = \varphi(x) - c_0. \tag{4}$$

Donc, l'opération $I(\varphi)$ donne, dans ce cas, l'intégrale de l'équation aux différences finies (4); en d'autres termes, si l'on pose

$$s(z) = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \left(\frac{z^n}{1-p^{2n}} + \frac{z^{-n}}{1-p^{-2n}}\right) \tag{5}$$

et que la fonction $f(y)$ soit donnée par une série de Laurent dans l'anneau $(|p^2|R, R_1)$ qui comprend l'anneau $(|p^2|\rho, \rho)$, on aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} [f(y) - f(p^2y)]\, s\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y} = f(x). \tag{6}$$

Or cette formule peut s'étendre comme il suit au cas où $f(y)$ n'est plus

régulière dans tout l'anneau $(|p^2|R,\ R_1)$, mais a un nombre quelconque de singularités dans l'anneau intérieur $(|p^2|\rho,\ \rho)$.

3. A cet effet, je remarque que la fonction $s(z)$, représentée par la formule (5) dans l'anneau circulaire $(|p^2|,\ 1)$, peut être définie dans tout le plan de la façon suivante:

Je pars de la fonction [1]

$$\eta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} p^{n^2} z^n$$

régulière dans tout le plan, excepté aux points $z = 0$ et $z = \infty$. Si l'on pose

$$s(z) = -z\frac{d}{dz}\log\{\sqrt{-z}\,\eta(-pz)\},$$

l'on trouve sans difficulté les propriétés suivantes pour la fonction $s(z)$:

a) $s(z)$ est représentée par la formule (5) dans l'anneau $(|p^2|,\ 1)$;

b) $s(z)$ est régulière pour tous les points du plan, excepté $z = 0$ et $z = \infty$, qui sont des points singuliers essentiels, et les points $z = p^{2n}$ qui sont des pôles du premier ordre avec les résidus respectifs $-p^{2n}$;

c) la fonction $s(z)$ satisfait aux équations fonctionnelles:

$$s(z) - s(p^2 z) = 1, \quad \text{ou} \quad \Delta s(z) = 1; \tag{7}$$

$$s\left(\frac{1}{z}\right) = -s(z). \tag{8}$$

Actuellement, je considère l'expression

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\rho)} s\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,\frac{dy}{y} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(p^2\rho)} s\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,\frac{dy}{y}$$

---

[1] Cette fonction joue dans la théorie des fonctions à période multiplicatoire, c'est à dire telles que $\varphi(p^2x) = \varphi(x)$, le même rôle que la fonction $\Theta(x)$ dans la théorie des fonctions doublement périodiques. Je remarque à cette occasion qu'on peut substituer avec avantage à l'étude de ces dernières fonctions celle des fonctions à période multiplicatoire, comme je l'ai déjà indiqué dans mon Mémoire *Sopra una classe importante di funzioni monodrome* publié en 1879 dans le Giornale de M. Battaglini. M. Rausenberger, sans avoir eu connaissance de mon travail, a eu la même idée qu'il a développée dans son intéressant ouvrage *Lehrbuch der periodischen Functionen*, Leipzig 1884. J'emploie ici la notation $\eta(z)$ de M. Rausenberger.

où $f(y)$ est une fonction donnée dans l'anneau $(|p^2|R, R_1)$ qui comprend $(|p^2|\rho, \rho)$. Je suppose que la fonction $f(y)$ n'ait, dans cet anneau, d'autres singularités que les points α_i intérieurs à $(|p^2|\rho, \rho)$, pour lesquels la fonction devient singulière respectivement comme les fonctions

$$G_i\left(\frac{1}{y-\alpha_i}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{i,\nu}}{(y-\alpha_i)^{\nu}}, \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, m)$$

et où y est compris dans l'anneau $(|p^2|\rho, \rho)$.

L'expression I est égale, par le théorème de Cauchy, à la somme des résidus à l'intérieur de l'anneau $(|p^2|\rho, \rho)$, c'est-à-dire à la somme des résidus relatifs aux points α_i et au point $y = x$ où la fonction $s\left(\frac{y}{x}\right)$ est infinie, on a donc:

$$I = -f(x) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{i,\nu+1}}{\underline{|\nu}} D_{\alpha_i}\left[\frac{1}{\alpha_i} s\left(\frac{\alpha_i}{x}\right)\right].$$

D'autre part, on a, à cause de la relation (7):

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} s\left(\frac{y}{x}\right)[f(y) - f(p^2 y)]\frac{dy}{y} + C$$

où l'on a posé

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(p^2\rho e^{i\theta})d\theta;$$

d'où, en égalant les deux expressions de I, et en tenant compte de la formule (8), il vient enfin:

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} s\left(\frac{x}{y}\right)[f(y) - f(p^2 y)]\frac{dy}{y} = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{i,\nu+1}}{\underline{|\nu}} D^{\nu}_{\alpha_i}\left[\frac{1}{\alpha_i} s\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)\right] + C.$$

Cette formule donne l'extension de la formule (6) au cas où la fonction $f(x)$ admet des singularités en nombre fini dans l'anneau $(|p^2|\rho, \rho)$. La fonction du second membre est régulière dans tout l'anneau et peut

par conséquent s'exprimer par une série de LAURENT; et si l'on indique cette fonction par $F(x)$, on a par la formule (7)

$$\Delta F(x) = \Delta f(x) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{i,\nu+1}}{\underline{|\nu}} D^{\nu}\left(\frac{1}{a_i}\right)$$

ou

$$(10) \qquad \Delta F(x) = \Delta f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} G_i\left(-\frac{1}{a_i}\right).$$

De sorte que si l'on pose

$$\Delta f(x) = \varphi(y),$$

on peut conclure de ce qui précède que l'opération $I(\varphi)$ donne pour résultat une intégrale, régulière dans tout l'anneau, de l'équation aux différences finies

$$\Delta F = \varphi(x) - \text{const.}$$

La constante est nulle si les points singuliers de la fonction $f(x)$ satisfont à la condition

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} G_i\left(-\frac{1}{a_i}\right) = 0.$$

4. Si l'on a

$$\Delta f(x) = 0,$$

ce qui exige que la condition (11) soit satisfaite, la fonction $f(x)$ a une période multiplicatoire p^2 et la formule (9) devient

$$(12) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{i,\nu+1}}{\underline{|\nu}} D^{\nu}\left[\frac{1}{a_i} s\left(\frac{x}{a_i}\right)\right] - C,$$

qui donne l'expression analytique d'une fonction à période multiplicatoire qui a m points singuliers essentiels d'espèce donnée, à l'intérieur de chaque anneau élémentaire. Cette formule est analogue à celle donnée par M. APPELL (Acta Mathematica, T. 1, p. 138) et qui fait connaître l'expression analytique d'une fonction doublement périodique, ayant un nombre fini de points singuliers essentiels. On obtiendrait sans peine, d'une façon analogue, l'expression d'une fonction ayant un nombre infini de points singuliers, ou même un espace lacunaire, à l'intérieur de l'an-

neau $(|p^2|\rho, \rho)$. Si, en particulier, les points singuliers α_i se réduisent à des pôles de l'ordre r_i respectivement, la formule (12) devient

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{A_{i,1}}{\alpha_i} s\left(\frac{x}{\alpha_i}\right) + \frac{A_{i,2}}{1} D\left[\frac{1}{\alpha_i} s\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)\right] + \ldots + \frac{A_{i,r_i}}{\underline{|r_i - 1}} D^{(r_i-1)}\left[\frac{1}{\alpha_i} s\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)\right]\right\}$$

qui est, pour les fonctions à période multiplicatoire, ce qu'est la formule bien connue de M. Hermite pour les fonctions doublement périodiques.

ÜBER DIE DARSTELLUNG WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN.

Auszug eines Briefes an Herrn G. Mittag-Leffler

VON

C. RUNGE
in BERLIN.

Der Beweis, dass sich jede willkürliche stetige Function einer reellen Veränderlichen x in eine für alle in Betracht kommenden Werthe von x gleichmässig convergente Summe von rationalen Functionen entwickeln lässt, kann durch folgende elementare Betrachtungen geführt werden.

Die Function

$$\frac{1}{1 + x^{2n}}$$

ist für $|x| \leqq 1 - \delta$ (wo δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet) beliebig wenig von 1, für $|x| \geqq 1 + \delta$ beliebig wenig von Null verschieden, vorausgesetzt dass für n eine hinreichend grosse positive ganze Zahl gewählt wird.

Es bildet diese Function eine Art discontinuirlichen Factors, mit dessen Hilfe ich zunächst einen gleichmässig convergenten Ausdruck für eine gebrochene Linie herstellen werde.

Seien y_1 und y_2 zwei eindeutige stetige Functionen von x, welche für $x = 1$ denselben Werth besitzen, so wird

$$y_2 + \frac{1}{1 + x^{2n}}(y_1 - y_2)$$

für $0 \leqq x \leqq 1$ beliebig wenig von y_1 und für $1 \leqq x \leqq 1 + k$ beliebig wenig von y_2 verschieden sein, sobald n hinreichend gross gewählt ist, (k ist dabei eine beliebige positive Grösse).

Denn zunächst kann man δ so klein annehmen, dass für

$$1 - \delta \leqq x \leqq 1 + \delta$$

y_1 und y_2 beliebig wenig von einander verschieden sind, und in Folge dessen

$$y_2 + \frac{1}{1 + x^{2n}}(y_1 - y_2),$$

da $\frac{1}{1 + x^{2n}} < 1$ ist, beliebig wenig von y_1 und y_2 abweicht. Alsdann, nachdem δ in dieser Weise festgesetzt ist, kann man n so gross wählen, dass

$$\frac{1}{1 + x^{2n}}$$

für $0 \leqq x \leqq 1 - \delta$ beliebig wenig von 1 und für $1 + \delta \leqq x \leqq 1 + k$ beliebig wenig von 0 abweicht, und in Folge dessen

$$y_2 + \frac{1}{1 + x^{2n}}(y_1 - y_2)$$

beliebig genau mit y_1 resp. y_2 übereinstimmt.

Setzt man nun voraus, dass die Entwicklung in eine gleichmässig convergente Summe von rationalen Functionen für y_1 und y_2 möglich sei, und bezeichnet mit $R_n^{(1)}(x)$, $R_n^{(2)}(x)$ die Summen der ersten n Glieder in den Ausdrücken für y_1 resp. y_2, so ist

$$R_n(x) = R_n^{(2)}(x) + \frac{1}{1 + x^{2n}}[R_n^{(1)}(x) - R_n^{(2)}(x)]$$

eine rationale Function von x, welche für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1 + k$ beliebig genau mit derjenigen stetigen Function übereinstimmt, welche von 0 bis 1 durch y_1, von 1 bis $1 + k$ durch y_2 definirt ist.

Daraus folgt, dass $\lim\limits_n R_n(x)$ oder, was dasselbe ist,

$$R_1(x) + [R_2(x) - R_1(x)] + [R_3(x) - R_2(x)] + \dots$$

eine gleichmässig convergente Darstellung dieser Function bildet.

Die Punkte o, I, $\mathrm{I}+k$ sind hierbei nicht wesentlich. Setzt man

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}+\left(\frac{x-a}{a_1-a}\right)^{2n}} \quad \text{statt} \quad \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}+x^{2n}},$$

so treten a, a_1, a_1+k (drei beliebige Grössen) an Stelle von o, I, $\mathrm{I}+k$.

Gesetzt nun es solle in dem Intervalle $a \leqq x \leqq a'$ eine gebrochene Linie dargestellt werden, deren Eckpunkten die Abscissen $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ entsprechen; d. h. es soll eine gleichmässig convergente Summe von rationalen Functionen hergestellt werden, welche

$$\begin{array}{llll} \text{für} & a \leqq x \leqq a_1 & \text{mit} & \alpha_1(x-a_1)+b_1 \\ \text{für} & a_1 \leqq x \leqq a_2 & \text{mit} & \alpha_2(x-a_2)+b_2 \qquad [b_2=b_1-\alpha_2(a_1-a_2)] \\ \text{für} & a_2 \leqq x \leqq a_3 & \text{mit} & \alpha_3(x-a_3)+b_3 \qquad [b_3=b_2-\alpha_3(a_2-a_3)] \end{array}$$

etc.

übereinstimme.

Indem man $y_1 = \alpha_1(x-a_1)+b_1$, $y_2 = \alpha_2(x-a_2)+b_2$ setzt, erhält man einen Ausdruck, welcher von $x=a$ bis a_2 mit der gebrochenen Linie, von $x=a_2$ bis a' dagegen mit $\alpha_2(x-a_2)+b_2$ übereinstimmt.

Indem man alsdann den so gewonnenen Ausdruck mit y_1 bezeichnet und $y_2 = \alpha_3(x-a_3)+b_3$ setzt, erhält man einen neuen Ausdruck, der bis $x=a_3$ mit der gebrochenen Linie, von a_3 bis a' aber mit $\alpha_3(x-a_3)+b_3$ übereinstimmt.

Dies Verfahren fortsetzend erhält man schliesslich die Darstellung der gebrochenen Linie.

Sei $y_1 = \lim\limits_n R_n^{(1)}(x)$ diese Darstellung und werde y_2 gleich derjenigen linearen Function von x gesetzt, welche für $x=a$ und $x=a'$ mit y_1 übereinstimmt, so liefert

$$R_n(x) = y_2 + \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}+\left(\frac{2x-(a+a')}{2(a'-a)}\right)^{2n}}\left(R_n^{(1)}(x)-y_2\right)$$

eine rationale Function, welche für $a \leqq x \leqq a'$ beliebig genau mit y_1, für $x \leqq a$ und $x \geqq a'$ dagegen beliebig genau mit y_2 übereinstimmt.

Denn aus der Bildungsweise von $R_n^{(1)}(x)$ ist leicht ersichtlich, dass es im Endlichen endlich bleibt, im Unendlichen aber wie $a_{\lambda+1}(x - a') + b_{\lambda+1}$ (die lineare Function, welche der letzten Seite entspricht) unendlich wird, woraus denn das Übrige wie oben gefolgert wird. $\lim_n R_n(x)$ stellt, wenn ich mich so ausdrücken darf, eine geschlossene gebrochene Linie dar, d. h. eine solche, bei der die beiden äussersten Seiten Theile derselben Graden sind und sich in's Unendliche erstrecken.

Einer jeden Curve, die eine eindeutige stetige Function repräsentirt, kann man eine gebrochene Linie einzeichnen, die sich ihr beliebig genau anschliesst. Denn nimmt man die Seiten derselben hinreichend klein an, so muss die Differenz der beiden Ordinaten gleicher Abscisse kleiner sein als die grösste Werthschwankung der Ordinaten der Curve in dem einer Seite entsprechenden Intervall und muss mithin wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Function mit dem Intervall zugleich beliebig klein werden.

Da man nun andrerseits, wie oben nachgewiesen, sich durch rationale Functionen einer gebrochenen Linie beliebig genau anschliessen kann, so folgt dasselbe für eine beliebige stetige eindeutige Function.

Wenn die Function sich für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ an ein und dieselbe grade Linie beliebig genau anschliesst, so kann man sich ihr durch eine »geschlossene gebrochene» Linie beliebig genau annähern, und kann daher eine rationale Function $R_n(x)$ bilden, welche für alle reellen Werthe von x beliebig wenig $\left(\text{z. B. um weniger als } \frac{1}{n}\right)$ von der Function verschieden ist.

Das ist insbesondere der Fall, wenn die Function für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ sich demselben endlichen Werthe nähert. Dann ist $\lim_n R_n(x)$ oder, was dasselbe ist, $R_1(x) + [R_2(x) - R_1(x)] +$ etc. für die ganze reelle Axe mit Einschluss der Unendlichkeit gleichmässig convergent.

Wenn die Function für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ sich nicht derselben Graden anschliesst, so wird man nach dem Vorgehenden eine rationale Function $R_n(x)$ bilden können, welche in dem Intervall $-n$ bis $+n$ sich weniger als $\frac{1}{n}$ von der Function unterscheidet. Dann convergirt $\lim_n R_n(x)$ innerhalb jeder noch so grossen Strecke gleichmässig und stellt die Function dar. Aber der Bereich der gleichmässigen Convergenz

schliesst nicht nothwendig die Unendlichkeit in sich. — Diese Darstellung kann man verwerthen zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

bei vorgeschriebenen Grenzbedingungen, nämlich zur Herstellung einer Lösung, welche für $\eta = 0$ gleich einer vorgeschriebenen stetigen Function von ξ wird und zugleich für positive Werthe von η stetig ist.

Wenn die vorgeschriebene Function für $x = +\infty$ und $x = -\infty$ sich demselben endlichen Werthe nähert (diesen Fall will ich hier allein betrachten), so werden die zur Darstellung verwendeten rationalen Functionen $R_n(x)$ nur für complexe Werthe von x unendlich, und da die Functionen reell sind, so sind die Unendlichkeitsstellen paarweise conjugirt. Seien $c_1, c_2, \ldots, c_r$ die unterhalb der reellen Axe gelegenen, $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_r$ die ihnen conjugirten oberhalb gelegenen. Zerlegt man nun $R_n(x)$ in Partialbrüche und bezeichnet mit $r_n(x)$ das Aggregat der in $c_1, c_2, \ldots, c_r$ unendlich werdenden Glieder, so wird

$$R_n(x) - r_n(x)$$

nur noch in $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_r$ unendlich. Verwandle ich nun hier alle von x unabhängigen Grössen in ihre conjugirten, wodurch $r_n(x)$ in $\bar{r}_n(x)$ übergeht, $R_n(x)$ aber ungeändert bleibt, so resultirt, dass

$$R_n(x) - \bar{r}_n(x)$$

nur in $c_1, c_2, \ldots, c_r$ unendlich wird. Folglich ist $\bar{r}_n(x)$ das Aggregat der in $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_r$ unendlich werdenden Glieder, und mithin ist

$$R_n(x) - r_n(x) - \bar{r}_n(x)$$

constant, weil es an keiner Stelle mehr unendlich wird. Die Constante ist reell, denn es sind $r_n(x)$ und $\bar{r}_n(x)$ für reelle Werthe von x conjugirt und daher ist ihre Summe reell.

Man hat also

$$R_n(x) = r_n(x) + \bar{r}_n(x) + C.$$

Die reellen Theile von $r_n(x)$ un $\bar{r}_n(x)$ sind für reelle Werthe von x einander gleich, folglich ist der reelle Theil von $2r_n(x) + C$ für reelle

Werthe von x gleich $R_n(x)$ und also der reelle Theil von $2r_n(\xi + \eta i) + C$ eine Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, welche für $\eta > 0$ stetig ist und für $\eta = 0$ der vorgeschriebenen Function beliebig nahe kommt. Bezeichnet man ihn mit u_n, so wird $\lim_n u_n$ für $\eta \geqq 0$ und alle Werthe von ξ gleichmässig convergiren und die verlangte Lösung darstellen. Dies bedarf der näheren Ausführung, ich begnüge mich indessen hier darauf hinzuweisen, dass man auf diesem elementaren Wege die verlangte Integration auszuführen im Stande ist.

Ferner bemerke ich, dass man die Form der zur Darstellung verwendeten Functionen $R_n(x)$ auf mannigfache Weise vereinfachen kann, wenn man die von mir in dem Aufsatze *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* (Acta mathematica, Bd. 6) auseinandergesetzte Methode darauf anwendet, vermöge deren z. B. $R_n(x)$ durch eine andere für alle reellen Werthe sich beliebig wenig von ihr unterscheidende reelle Function ersetzt werden kann, die nur an einer Stelle und an der zu ihr conjugirten unendlich wird.

ACTA MATHEMATICA, 7. 1885/1886.

INHALT. — TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 95 ligne 9, » 96 » 3 : au lieu de $\frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta_3(w, q)}{dw}\right)_{(w=0)}$ lire $\frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta_1(w, q)}{dw}\right)_{(w=0)}$

» » » 15 » » $\frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta(w, q)}{dw}\right)_{(w=0)}$ » $\frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta_1(w, q)}{dw}\right)_{(w=0)}$